CATECHISMO

DI

MATEMATICHE PURE

AD USO DEGLI STUDJ GENERALI

ARITMETICA

ARITMETICA

DI

CARLO ROCCO

PROFESSORE DI MATEMATICA NEL R. COLLEGIO MILITARE,
SOCIO RESIDENTE DELL' ACCADEMIA PONTANIANA.

Mathesis philosophiae, et scientiis
initia, ac veluti mammam praebet.
BACONE.

NAPOLI
Dallo Stabilimento del Guttemberg

1849.

Gli esemplari non muniti della firma dell' Autore, sono contraffatti.

La vedova di D. Carlo Rocco
Rosina la Manna

INDICE

LIBRO PRIMO

NUMERI INTERI.

LIBRO SECONDO.

NUMERI FRATTI.

LIBRO TERZO

NUMERI INCOMMENSURABILI.

LIBRO QUARTO.

RAGIONI E PROPORZIONI.

LIBRO QUINTO.

APPLICAZIONE DELLE REGOLE DELL' ARITMETICA AI NUMERI CONCRETI.

ARITMETICA

LIBRO PRIMO

NUMERI INTERI.

CAPITOLO PRIMO

DEFINIZIONI, E NOZIONI PRELIMINARI

1. *Grandezza* dicesi tutto ciò ch' è suscettivo di accrescimento e di diminuzione; tutto ciò, di cui si può assegnare o concepire il doppio o la metà, il triplo o la terza parte, ecc.

2. Grandezza *discreta* o *numero* è la collezione di più cose, o di più parti simili e separate, come dieci stelle, sette cavalli, otto ducati, ecc.; e si chiama *unità* una di quelle cose, o di quelle parti simili.

3. Grandezza *continua* è quella, che si considera come un sol tutto, senza distinzioni di parti. Si manifestano in tal modo l'*estensione* de'corpi in generale, ed in particolare i loro contorni, e le *facce*, che ne determinano le forme.

4. Il carattere proprio e distintivo dell' estensione è dunque riposto nel legame o *continuità* delle parti, che non si possono nè scorgere, nè numerare. Al contrario nel numero si considera solamente la *quantità*, ossia si considera quante cose o parti simili contiene.

5. E poichè ogni grandezza si può ridurre a numero, paragonandola ad un'altra della stessa specie presa come unità, è addivenuto che la parola *quantità* è stata appropriata alla grandezza in generale, chiamandosi *quantità continua* la grandezza considerata come continua, per distinguerla dal numero, che è stato chiamato *quantità discreta* o *discontinua*.

6. Le scienze *matematiche* hanno per obbietto le grandezze o quantità. Esse esaminano le relazioni di sito, le proprietà che presentano le forme de'corpi in quanto alla loro estensione, ed i rapporti di quantità, che risultano dal loro confronto.

7. Ciascuna delle scienze accennate ha un nome particolare secondo l'obbietto, che contempla. Base e fondamento di tutte è l'*Aritmetica*.

8. L'Aritmetica è la scienza de'numeri. Essa insegna a ben conoscerli, non che a comporli ed a decomporli.

9. Si distinguono due specie di numeri, cioè numeri *interi*, e numeri *fratti*.

Il numero intero è quello, di cui più sopra abbiam parlato, cioè, la collezione di più unità.

Il numero fratto, o *frazione*, o *rotto*, è la collezione di una o più parti, che si prendono dividendo l'unità in parti eguali. come *tre quarti di palmo, due quinti di ducato, due terzi di rotolo*, ecc.

10. Un numero si dice *concreto*, cioè determinato, quando s'enuncia dinotando la specie delle sue unità, come *quindici uomini*, *sette ducati*, ecc. Si dice poi *astratto*, cioè indeterminato, quando s'enuncia senza dinotare la specie delle sue unità, come quando si dice: *undici*, *venti*, *otto volte*, ecc.

11. L'Aritmetica non potrebbe giungere allo scopo, di cui abbiam parlato nel dare la definizione di questa scienza, senza appoggiarsi ad alcuni principii evidenti per se stessi, che si chiamano *assiomi*, o *notizie comuni*. Essi sono i seguenti.

1.° Il tutto è maggiore di qualunque sua parte, ed è uguale alla collezione di tutte le parti, nelle quali è stato diviso.

2.° Due quantità eguali ad una terza sono eguali fra loro.

3.° Se a quantità eguali s'aggiungono, o si tolgono, altre eguali, o una medesima comune ad ambedue, le quantità che ne risultano, saranno eguali.

4.° Se a quantità diseguali si aggiungono, o si tolgono, quantità eguali, o una stessa comune ad ambedue, le quantità, che ne risultano, saranno diseguali.

5.° Le quantità, che sono doppie, triple, quadruple, ecc. di una medesima quantità, sono eguali fra loro.

6.° Le quantità, che sono la metà, la terza parte, la quarta parte, ecc. di una stessa quantità, sono eguali fra loro.

12. Nella esposizione delle proprietà de' numeri faremo uso talvolta delle parole. *teorema*, e *problema*. Il teorema è una verità, che diviene evidente per mezzo di un ragionamento, che dicesi *dimostrazione*. Il problema poi è una quistione, che si propone a risolvere, e perciò esige una *soluzione*.

CAPITOLO II.

NUMERAZIONE.

13. Abbiam detto (n° 8) che la prima cosa, di cui s'occupa l'Aritmetica, consiste a ben conoscere i numeri. Fondamento di questa conoscenza è la *numerazione*, di cui andiamo a parlare.

14. *Definizione. La numerazione è l'arte di formare, di nominare, e di scrivere tutt'i numeri possibili.*

15. Da questa definizione si deduce che la numerazione si compone di tre parti, delle quali ci occuperemo successivamente ne' tre seguenti articoli

ARTICOLO I.

Formazione de' numeri.

16. Stando alla definizione de' numeri interi (n° 9), il modo più naturale di formare questi numeri è quello di unire primieramente una unità con un' altra, poi un' altra ancora con la unione delle due precedenti, e continuando in questa guisa si compongono delle collezioni di unità, o de' numeri, che si esprimono con nomi particolari. Questi nomi cambiano da un linguaggio ad un altro, ma la legge di formazione è sempre la stessa. Quali siano nella nostra lingua si vedrà nell'articolo seguente.

ARTICOLO II.

Numerazione parlata.

17. *Definizione. La numerazione parlata è l'arte di nominare tutt i numeri possibili con piccolissimo numero di parole semplici, e de'le loro composte*

18. Era necessario di adoperare pochissimi vocaboli, perchè la serie de' numeri interi, o *naturali*, che si formano nel modo sopraddetto (n° 16), non ha fine. Infatti, per quanto grande possa essere un numero, si può sempre concepire un numero più grande con aggiungere al primo una unità. Quindi non si possono esprimere in qualunque linguaggio tutt' i numeri possibili con nomi indipendenti fra loro. Per ovviare a questo inconveniente, ecco il modo ch' è stato immaginato.

19. Si comincia dall' unità o da *uno*: l' unità aggiunta a se stessa dà un numero chiamato *due*, questo accresciuto di uno compone il numero *tre*. Aggiungendo successivamente l'unità a ciascun numero ottenuto, si formano i numeri: *quattro*, *cinque*, *sei*, *sette*, *otto*, *nove*. Quest' ultimo accresciuto di una unità dà il numero *dieci*.

20. La collezione di dieci unità forma un nuovo *ordine* di nnità chiamato *decina*, e si ricomincia a contare per decine nello stesso modo tenuto nel contare per unità; solamente in vece di dire: *una decina*, *due decine*, *tre decine*, *quattro decine*, *cinque decine*, *sei decine*, *sette decine*, *otto decine*, *nove decine*, si dice: *dieci*, *venti*, *trenta*, *quaranta*, *cinquanta*, *sessanta*, *ottanta novanta*.

21. Or, tra due collezioni consecutive di decine si trovano nove numeri intermedii, i quali sono composti di decine ed unità; per conseguenza volendo nominare i numeri accennati, basta nominare successivamente le decine e le unità, di cui sono formati, dicendo: *diciassette*, *diciotto*, *diciannove*, *ventuno*, *ventidue*, e così in progresso fino a *novantanove*. Ma per i numeri compresi fra dieci e diciassette, in vece di dire: *dieciuno*, *diecidue*, *dieci-tre*, *dieciquattro*, *diecicinque*, *diecisei*, si dirà: *undici*, *dodici*, *tredici*, *quattordici*, *quindici*, *sedici*.

22. Il numero *novantanove* accresciuto di una unità, forma il numero *cento*, composto di dieci decine. Dunque la riunione di dieci decine forma un nuovo *ordine* d'unità, chiamato *centinajo*, e si ricomincia a contare per centinaja nello stesso modo tenuto nel contare per decine. Ma in vece di dire *un centinajo*, *due centinaja*, *tre centinaja*, *quattro centinaja*, *cinque centinaja*, *sei centinaja*, *sette centinaja*, *otto centinaja*, *nove centinaja*, si dirà: *cento*, *duecento*, *trecento*, *quattrocento*, *cinquecento*, *seicento*, *settecento*, *ottocento*, *novecento*.

23. Or tra due collezioni consecutive di centinaja si trovano novantanove numeri intermedii, che si formano con aggiungere successivamente i novantanove primi numeri alla prima delle due collezioni accennate. Quindi ciascuno di detti numeri intermedii contiene centinaja ed unità, o pure, centinaja, decine, ed unità; e però si possono nominare facilmente dicendo: *cento uno*, *cento due*, ecc. sino a *cento novantanove*; *duecento uno*, *duecento due*, ecc. sino a *duecento novantanove*; *trecento uno*, *trecento due*, ecc........

24. In tal modo si arriva al numero *novecento novantanove*, il quale accresciuto di uno da' dieci centinaja, ovvero *mille*. Dunque la collezione di dieci centinaja produce un nuovo *ordine d'unità principali*, ch'è quello delle *migliaja*. Or il modo tenuto per contare da uno sino a novecento-novanta-nove, si applica a contare da un migliajo sino a novecento-novanta-nove migliaja, dicendo: *mille*, *duemila*, *tremila*, *quattromila*, ecc.... sino a *centonovanta-nove-mila*.

25. Se al numero cento-novanta-nove-mila s'aggiunge un migliajo, s'avrà il numero chiamato *milione*, composto di mille migliaja, di guisa che mille volte mille fanno un milione.

Or si osservi che per comporre i nomi de' numeri da uno sino a centonovanta-nove-mila, si è contato per unità, decine, e centinaja semplici, e per unità, decine, e centinaja di migliaja. Da

ciò segue che per comporre i nomi de' numeri da un milione sino a *cento-novanta-nove-mila milioni* si dovrà contare per unità, decine, e centinaja di milioni, e per unità, decine, e centinaja di migliaja di milioni.

26. Se al numero cento-novanta-nove-mila milioni s'aggiunge un migliajo di milioni, s'avrà il numero chiamato *bilione*, ch'è composto di mille volte mille milioni. Contando in seguito per unità, decine, e centinaja semplici, e per unità, decine, e centinaja di migliaja di bilioni, s'arriverà al numero chiamato *trilione*, ch' equivale a mille volte mille bilioni. Proseguendo nello stesso modo s'avrà il *quadrilione*, il *quintilione*, il *sestilione*, il *settilione*, ecc...

27. Dalle cose precedenti si può conchiudere che con pochissimi vocaboli, vale a dire con la sola combinazione de' nomi de' nove primi numeri con quelli di diverse unità, *Unità*, *Decina*, *Centinajo*, *Migliajo*, *Milione*, *Bilione*, *Trilione*, ecc., s'arriva a formare i nomi di tutt'i numeri, che s'avranno mai a considerare.

28. Riflettendo sul sistema di numerazione finquì esposto, si vede facilmente che questo sistema consiste nel classificare i numeri in

unità, decine, e centinaja semplici,
unità, decine; e centinaja di migliaja,
unità decine, e centinaja di milioni,
unità, decine, e centinaja di migliaja di milioni,
unità, decine, e centinaja di bilioni,
unità, decine, e centinaja di migliaja di bilioni; ecc.

29. Vedemmo più sopra che le decine semplici formano le unità di *second'ordine*, le centinaja semplici quelle del *terz'ordine*, le migliaja semplici quelle del *quart' ordine*. Continuando allo stesso modo, le decine di migliaja saranno le unità di *quint' ordine*, le centinaja di migliaja quelle del *sest' ordine*, i milioni del *settim'ordine*, le decine di milioni dell' *ottav'ordine*, ecc.

30. Dalle cose precedenti apparisce che i nomi di *unità*, *decine*, e *centinaja*, si ripetono sempre, e che di quattro in quattro ordini si trovano i nomi: *mille*, *milione*, *mille milioni*, *bilione*, *mille-bilioni*, *trilione*, ecc. Da ciò poi è nato che la riunione di tre ordini semplici forma un ordine composto, ch'è stato chiamato *classe*. Quindi le unità, le decine, e le centinaja semplici formano la *prima classe;* le migliaja, le decine di migliaja, e le centinaja di migliaja, costituiscono la *seconda classe;* i milioni, le decine di milioni, e le centinaja di milioni, la *terza classe*; le migliaja di milioni, le decine di migliaja di milioni, e le centinaja di migliaja di milioni, la *quarta classe;* i bilioni, le decine di bilioni, e le centinaja di bilioni, la *quinta classe* ecc.

Si vede ancora che le unità semplici, le migliaja, i milioni, le migliaja di milioni, i bilioni, ecc. esprimono le unità di ciascuna classe, e che ciascuna di queste unità è mille volte più grande di

quella che la precede. Inoltre è manifesto che ogni classe ha le sue unità, le sue decine, le sue centinaja, eccetto quella dell'ordine, *ternario* il più elevato, che potrà avere le unità solamente, o le unità e le decine, o in fine le unità, le decine, e le centinaja. Per esempio, il numero: *quarantacinque milioni ottocento settanta quattro mila trecento cinquantasei*, è composto di tre classi, cioè della classe delle unità semplici, di quella delle migliaja, e di quella de' milioni, in cui mancano le centinaja di milioni.

ARTICOLO III.

Numerazione scritta.

31. La numerazione parlata abbrevia moltissimo la nomenclatura de' numeri interi, e fa ben conoscere la loro formazione. Ma quest'abbreviazione diviene insufficiente, allorchè si tratta di combinare i numeri fra loro, a fine di comporli e decomporli, e molto meno di conoscere le loro proprietà. Convien dunque trovare il modo di rappresentare i numeri con segni o con simboli più semplici di quelli, che costituiscono il linguaggio ordinario. È questo l'obbietto della numerazione scritta

32. *Definizione. La numerazione scritta è l'arte di esprimere tutt' i numeri possibili per mezzo di segni o simboli abbreviati, che si chiamano cifre o figure.*

33. Era facile il vedere che essendosi formati i nomi de' numeri combinando i nomi de' nove primi con quelli delle unità de' differenti ordini, bisognava rappresentare i nove primi numeri rispettivamente con simboli o cifre. Le cifre, che si adoperano, sono

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

Or non si conta solamente per unità, ma per decine, centinaja, migliaja, ecc., per conseguenza era necessario di adoperare le cifre accennate anche per rappresentare le diverse collezioni di decine, di centinaja, di migliaja, ecc. Se non che non si vede in qual modo si possa allora distinguere se una cifra rappresenta tale o tal altra collezione d'unità. Pare che il primo inventore della numerazione sia giunto a superare questa difficoltà nel seguente modo.

Supponiamo, per esempio, che si debba scrivere il numero *settecentoquarantotto*, vale a dire: *sette centinaja*, *quattro decine*, ed *otto unità*. Il modo, che si presentava naturalmente, era quello di scrivere: 7 *centinaja* 4 *decine* 8. Ma questa maniera di scrivere non levava totalmente la difficoltà, perchè il numero proposto non si trovava espresso con le sole cifre, di cui abbiam parlato. Nondimeno, riflettendo che ogni unità è decupla di quella che la precede, nacque la felice idea di sopprimere le parole: *decine*, e *centinaja*, dando ad ogni cifra due valori, uno *proprio*, e l'altro *locale* o *relativo*. Il primo è così chiamato, perchè dipende

dalla forma della cifra, in virtù della quale la cifra medesima rappresenta una certa collezione d'unità di un ordine qualunque. Il secondo consiste in una *convenzione*, con cui si stabilisce che: *ogni cifra posta a sinistra d'un' altra acquista un valore dieci volte più grande di quello che avrebbe, se occupasse il posto di quest' ultima* Quindi il numero *settecentoquarantotto* sarà espresso da 748, perchè 8 trovandosi al primo posto a dritta indica le unità semplici, 4 essendo situato a sinistra di 8 avrà un valore dieci volte più grande di quello che avrebbe se occupasse il posto di 8, e perciò indicherà decine: finalmente il 7 trovandosi a sinistra di 4 deve indicare centinaja, stando alla convenzione accennata.

34. Purtuttavolta, si concepisce facilmente che quando s'enuncia un numero, possono mancare alcuni ordini d'unità: in tal caso, non si vede come si dovranno situare le cifre ai posti che convengono alle unità, ch' esse devono rappresentare. Ecco un' altra difficoltà; ma questa venne superata con immaginare una decima cifra *o*, chiamato *zero*, che significa il *niente*, o l'assenza di qualunque grandezza, perchè non ha alcun valore per se stessa, e serve solamente a conservare alle altre cifre i loro valori relativi nella scrittura de' numeri. Ed ecco perchè le nove prime cifre diconsi *significative*, a fine di distinguerle dallo zero, che non ha alcun significato, ossia che non ha alcun valore. Supponiamo, per esempio, che si debba scrivere il numero *settecentoquattro*, ovvero, *sette centinaja*, *niuna decina*, e *quattro unità*, è chiaro ch'esso sarà espresso scrivendo 704. Si può ora comprendere che il numero *dieci* sarà espresso da 10, *cento* da 100, *mille* da 1000, *diecimila* da 10000, *centomila* da 100000, un *milione* da 1000000. ecc....

35. Dalle cose precedenti risulta che con la convenzione sopraccennata, e con le dieci cifre

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

si possono scrivere tutt'i numeri possibili. Infatti, dal sistema di numerazione parlata si deduce che si può concepire ogni numero come diviso in diverse classi d'unità principali, o ternarii, e che ciascuna classe si compone d'unità, decine, e centinaja. Inoltre, queste classi procedono in modo che quelle dell'ordine il più elevato occupano il primo posto a sinistra, vengono appresso quelle dell'ordine immediatamente inferiore, e così di seguito. Quindi è facile stabilire la seguente regola, a fine di scrivere un numero qualunque.

36. *Regola per scrivere in cifre un numero espresso in linguaggio ordinario.*

Per scrivere in cifre un numero espresso in linguaggio ordinario:

Si situeranno le une presso alle altre, andando da sinistra a destra, le cifre che devono rappresentare rispettivamente le centinaja, le decine, e le unità di ciascun ordine ternario, avver-

tendo di scrivere zero in luogo delle unità, o delle decine, o delle centinaja, che mancano.

Supponiamo, per esempio, che si debba scrivere il numero *quattro cento milioni cinque cento trenta sei.* Esso sarà espresso da 400000536.

37. La maniera di leggere un numero, cioè di esprimere in linguaggio ordinario un numero scritto in cifre, è assai più facile di quella di scrivere in cifre un numero espresso in linguaggio ordinario, perchè quando un numero è scritto in cifre, la divisione in classi si fa sott'occhio, e non è intellettuale come avviene allorchè il numero s'enuncia in linguaggio ordinario.

38. *Regola per leggere in linguaggio ordinario un numero espresso in cifre.*

Per leggere in linguaggio ordinario un numero scritto in cifre: *Si dividerà in classi, ciascuna di tre cifre, andando da destra a sinistra, eccetto l'ultima classe a sinistra, che può avere una, o due cifre. Cominciando in seguito dalla sinistra. si leggerà ogni classe, come se fosse isolata, se non che dopo la lettura di una classe di posto pari si pronunzierà la voce* mila, *e dopo quella di una classe di posto impari si pronunzierà il nome delle unità di questa classe. Gli zeri, ovunque s'incontrino, si taceranno.*

Sia proposto, per esempio, di leggere il numero 70345601. Dividendolo in classi si ha 70, 345, 601. Vi sono tre classi, perciò l' ultima appartiene ai *milioni*, ed il numero proposto si leggerà dicendo: *settanta milioni*, *trecento quarantacinque mila, seicento uno.*

39. Quando il numero da leggersi ha molte cifre, si facilita una siffatta lettura mettendo successivamente 0, 1, 2. 3, 4. ecc. sulle prime cifre de' ternarii di posto impari, andando da destra a sinistra. In questo modo le cifre 0, 1, 2. 3, 4, ecc. dinoteranno rispettivamente i ternarii delle unità semplici, de' milioni, de' bilioni, de' trilioni, de'quadrilioni, ecc., ed i ternarii non notati con le cifre accennate saranno quelli delle migliaja semplici, delle migliaja di milioni, delle migliaja di bilioni, ecc.

Sia proposto, per esempio, di leggere il numero

930759900432576328465.

Si dividerà in classi di tre cifre, come si vede qui sotto:

$930^3, 759, 900^2, 432, 576^1, 328, 465^0$, e si leggerà dicendo: *novecento trenta trilioni, settecento cinquantanove mila, novecento bilioni, quattrocento trentadue mila, cinquecento settantasei milioni, trecento ventotto mila, quattrocento sessantacinque* (a),

(a). Il sistema di numerazione adoperato dai Francesi è alquanto diverso dal nostro. Il bilione presso di noi equivale a mille volte mille milioni, mentre il bilione francese vale semplicemente mille milioni. Simil-

40. Termineremo con stabilire in questo luogo un principio, che ci sarà assai utile in appresso, e che deriva naturalmente dal sistema di numerazione fin qui esposto. Esso consiste in ciò che segue

Quando s' aggiungono, o si tolgono, alla destra di un numero, uno, due, tre, quattro, ecc. zeri, questo numero diviene nel primo caso dieci volte, cento volte, mille volte, diecimila volte, ecc. più grande, e nel secondo più piccolo (b).

---

mente, il trilione francese è mille bilioni, il quadrilione è mille trilioni, ecc. Quindi per scrivere il bilione francese bastano dieci cifre, mentre si richiedono tredici cifre per scrivere il bilione italiano. Il sistema francese ha sull' italiano il vantaggio di essere più regolare. Infatti, nel sistema francese si ripetono, come nell' italiano, i nomi d' unità, decine, e centinaja, ma di quattro in quattro ordini si introduce un nome distinto, il che non succede nell' italiano. Quindi nel sistema francese dopo le unità, decine, e centinaja semplici, viene il migliajo, dopo le unità, decine, e centinaja di migliaja, viene il milione, dopo le unità, decine, e centinaja di milioni, viene il bilione, ecc.; il che non avviene nel sistema italiano, in cui dopo le unità, decine, e centinaja di milioni, vengono le migliaja di milioni, e così si trova rotta l' analogia con le classi precedenti.

Volendo leggere secondo il sistema francese il numero proposto nel testo, si dirà: *novecento trenta quintilioni, settecento cinquantanove quadrilioni, novecento trilioni, quattrocento trentadue bilioni, cinquecento settantasei milioni, trecento ventotto mila, quattrocento sessantasei.*

(b). L' Aritmetica, di cui oggi si fa uso, ci venne comunicata dagli Arabi, per cui le cifre adoperate in questa scienza diconsi *cifre Arabe.* Gli antichi Romani adoperavano altri caratteri per indicare i numeri, cioè le lettere majuscole dell' alfabeto, e propriamente le sette lettere I. V. X. L. C. D. M, di cui ecco il significato · I. indica l' *unità*, V. *cinque*, X. *dieci*, L. *cinquanta*, D. *cinquecento*, M. *mille.* Se due I. si mettano l' uno accanto all' altro, s' avrà II che dinota il numero *due*, similmente, III. equivale al numero *tre.* Il numero *quattro* viene espresso da IV, ed il numero *nove* da IX, di guisa che I. posto a sinistra a V, ed a X, fa diminuire questi numeri di una unità. Al contrario I. messo a destra di V, e di X, fa crescere questi numeri di una unità. Quindi i numeri 6, 7, 8, 11, 12, 13 vengono espressi da VI., VII, VIII., XI., XII., XIII. Se a sinistra de' numeri L, e C, si mette X, questi numeri vengono diminuiti di una decina; e però XL significa *quaranta*, e XC, *novanta.* Per l' opposto se X si metta a destra de' numeri accennati, questi verranno accresciuti di una decina, di guisa che LX significa *sessanta*, e CX *centodieci.* Talvolta il numero 500, che è dinotato dalla lettera D, si trova ancora espresso da IC. similmente, in luogo di M si scrive alle volte CIↃ. Queste nozioni bastano a dare una idea della numerazione adoperata dagli antichi Romani. Non si conosce poi il modo, che questi tenevano nel fare le operazioni del calcolo con i caratteri, di cui è parola.

CAPITOLO III.

ADDIZIONE

41. La formazione de' numeri interi, esposta nel capitolo precedente, mediante la riunione successiva delle unità, non dipende affatto dalla natura di queste unità; e lo stesso accade rispetto a tutte le proprietà, che risultano dalla medesima formazione, con l' ajuto delle quali s' arriva a comporre ed a decomporre i numeri, gli uni per mezzo degli altri; il che dicesi *calcolare*. Quindi in ciò che segue si troveranno esposte le principali operazioni del calcolo de' numeri interi, senza tener conto della natura delle loro unità, vale a dire si considereranno detti numeri come numeri astratti.

42 Poichè un numero è una collezione o un gruppo d' unità (n.° 2), è chiaro che può assoggettarsi a due specie d' operazioni; l'una con cui si forma per mezzo della riunione di altri gruppi; e si chiama *addizione*; l'altra con cui si scompone in altri gruppi, e s' appella *sottrazione*. Tutte le altre operazioni dell' Aritmetica dipendono più o meno da queste due.

43. *Definizione. L' addizione è una operazione, con la quale si riuniscono più numeri in un solo, che si chiama somma.*

44. Quando i numeri sono *semplici*, cioè formati di una sola cifra, l' addizione si fa facilmente. Così, ognun vede che 7 unità aggiunte a 4 unità fanno 11 unità. Parimente non si trova alcuna difficoltà nell' addizione de' numeri, che rappresentano unità del medesimo ordine. Così è manifesto che 30 unità, o 3 decine, aggiunte a 50 unità, o 5 decine, fanno 80 unità, o 8 decine, ecc.

45. Per abbreviare il linguaggio, s' indicano le operazioni precedenti con i segni $+$, e $=$, de' quali il primo si pronunzia *più*, ed il secondo *eguale*. Quindi apparisce che $7 + 4 = 11$, $30 + 50 = 80$.

46. La somma de' numeri *composti*; cioè formati di più cifre, si potrebbe effettuare come quella de' numeri semplici, riunendo successivamente tutte le loro unità. Ma operando in tal guisa, il calcolo diviene lunghissimo, e quasi impraticabile, quando i numeri sono grandissimi; e però si fa dipendere l' addizione totale da addizioni parziali più semplici, come si vedrà nel seguente paragrafo.

47. *Sia proposto di trovare la somma de' numeri* 527, 2519, 9812, 73, *e* 8.

Si dispongono i numeri proposti come si vede qui al margine, e poi si opera come segue.

Si fa primieramente l addizione de' numeri contenuti nella colonna delle unità, dicendo: 7 e 9, 16; e 2, 18; e 3, 21; e 8, 29. Si scrivono sotto la linea le 9 unità, e si ritengono le 2 decine per unirle a quelle della seconda colonna; il che da' 13 decine,

$$\begin{array}{r} 527 \\ 2519 \\ 9812 \\ 73 \\ 8 \\ \hline 12939 \end{array}$$

o unità di second' ordine Si scrivono sotto la linea le 3 unità, e si ritiene la decina per unirla alla colonna seguente. Si trova 19: si scrivono le 9 unità, e si ritiene la decina per la colonna seguente, la cui somma è allora composta di 12 unità: si scrivono le 2 unità, e si pone la decina alla sinistra; il che si riduce a scrivere la somma dell'ultima colonna. In questo modo s'ottiene il numero 12939, ch'è la somma de' numeri proposti.

48. Da ciò che precede si deduce la seguente regola generale. *Si scrivono primieramente gli uni sotto gli altri i numeri, che si vogliono addizionare, situando in una medesima colonna le unità dello stesso ordine; poi si tira una linea per separarli dal risultato, che si scriverà al di sotto. Ciò fatto, s' addizionano successivamente i numeri di ciascuna colonna, cominciando dalla destra. Se la somma non eccede 9, si scriverà tal quale; ma se contiene decine, si scriveranno solamente le sue unità, e si riterranno le sue decine per* portarle, *ossia per aggiungerle alla colonna seguente, su cui si opererà come sulla precedente,* e *così di seguito fino all' ultima colonna, al di sotto della quale si scriverà la somma trovata.*

49. È chiaro che operando nel modo precedente si effettua l'addizione de' numeri proposti, perchè il risultato dovrà contenere tutte le loro unità semplici, tutte le loro decine, tutte le loro centinaja, ecc., e per conseguenza sarà la riunione o somma di essi numeri.

CAPITOLO IV.

SOTTRAZIONE.

50. Consistendo l'addizione nel comporre un numero colla riunione di più altri, ne segue che l'operazione inversa dovrà avere per obbietto di *scomporre un numero in due parti, di cui l' una sia conosciuta.* La risoluzione di questo problema si riduce evidentemente a trovare di quanto un numero maggiore eccede un numero minore, o pure a togliere da un numero maggiore tutte le unità di un numero minore. Quindi considereremo l'operazione inversa dell' addizione sotto quest' ultimo punto di vista.

51. *Definizione. La sottrazione è una operazione, con cui, essendo dati due numeri disuguali, si toglie il minore dal maggiore.*

Il numero maggiore si chiama sottraendo, *il minore* sottrattore, *ed il risultato dell' operazione* resto, eccesso, o differenza (c).

(c) Alcuni danno al numero maggiore il nome di *Minuendo*, o di *Diminuendo*, ed al minore quello di *Sottraendo*, o di *Diminutore*. Queste denominazioni s' accordano meglio con le regole della Grammatica; nondimeno abbiamo stimato di non allontanarci dalla nomenclatura comunemente in uso presso noi.

52. Supponiamo, per esempio, che da 9 si debba sottrarre 4: in tal caso 9 è il sottraendo, 4 il sottrattore, e 5 il resto, l'eccesso, o la differenza.

Il numero 5, risultato dell' operazione, prende un nome piuttosto che l' altro, secondo che si vuol sapere quanto rimane togliendo 4 da 9, o di quanto 9 eccede 4, o in fine quanto differisce 9 da 4.

53. S' indica la sottrazione per mezzo del segno —, che significa *meno*. Così, 9 — 4 vuol dire 9 *meno* 4, o 9 *diminuito di* 4, o pure 4 *sottratto da* 9.

54. Quando i numeri sono semplici, cioè di una sola cifra, come nell' esempio precedente, la sottrazione non offre alcuna difficoltà, ed ognuno la sa fare a memoria. Succede lo stesso quando il resto deve contenere una sola cifra. Per esempio, si vede facilmente che 13 — 7 = 6, perchè 7 e 6 fanno 13, 17 — 9 = 8, perchè 9 e 8 fanno 17, ecc.. Ma quando i numeri sono composti di più cifre, allora bisogna operare come segue.

55. *Sia proposto di sottrarre il numero* 4721 *dal numero* 8964.

Dopo d' aver situato il numero minore sotto al maggiore, come si vede qui al margine, si comincerà l' operazione dalle unità semplici, dicendo: da 4 tolto 1, resta 3, che si scriverà sotto alla linea; da 6 tolto 2, resta 4, che si scriverà pure sotto la linea; da 9 tolto 7, resta 2, che si scriverà; da 8 tolto 4, resta 4. Il numero 4243 sarà il resto, o la differenza richiesta.

```
8964
4721
————
4243
```

56. Accade spesso che alcune cifre del sottrattore sono maggiori delle cifre corrispondenti del sottraendo: in tal caso si rendono possibili le sottrazioni parziali per mezzo degl' *impronti*.

Per esempio, supponiamo che si debba sottrarre 58 da 96. Non potendosi sottrarre 8 da 6, s' *impronta* una decina sulle 9 decine del sottraendo; il che si riduce a scomporre 96 in 8 decine e 16 unità, da cui sottratte 5 decine ed 8 unità, restano 3 decine ed 8 unità, ossia si ha per resto il numero 38. Si dirà dunque: da 6 tolto 8, non si può; da 16 tolto 8, resta 8; da 8 tolto 5, resta 3, e l' operazione sarà terminata.

```
96
58
——
38
```

57. Potrebbe accadere che fosse zero la cifra, su cui si dovrebbe fare l' impronto; allora si opererà come segue.

58. *Sia proposto di sottrarre il numero* 467 *dal numero* 8005.

Disposti i numeri come sopra, si dirà: non potendosi togliere 7 da 5, si devono improntare 10 unità. Ma l' impronto non può farsi che sulla prima cifra significativa 8, perciò si dovrà staccare un migliajo dalle 8 migliaja. Or un migliajo equivale a 9 centinaja, 9 decine, e 10 unità; per conseguenza si lasceranno le 9 centinaja al luogo delle centinaja, le 9 decine al luogo delle decine, e le 10 unità s'aggiungeranno alle 5 unità. Quindi si dirà: da 15 tolto 7, resta 8; da 9 tolto 6, resta 3; da 9 tolto 4, resta 5; da 7 tolto zero, resta

```
8005
 467
————
7538
```

7. L'operazione sarà terminata, ed il numero 7538 sarà il resto cercato.

59. È manifesto che se il sottraendo fosse stato 8000 in luogo di 8005, s'avrebbe dovuta cominciare l'operazione con dire: da 10 tolto 7, resta 3, e proseguire come or ora si è detto.

60. Dalle cose precedenti si deduce la seguente regola generale. *Si ponga il numero minore sotto al maggiore, in modo che le unità di un medesimo ordine si corrispondano in una stessa colonna, e si tiri una linea a fine di separare i due numeri dal resto. Ciò fatto, si tolgano successivamente, cominciando dalla destra, le unità del numero inferiore da quelle del numero superiore della medesima colonna, e si scrive il risultato sotto la linea. Se in una colonna la cifra inferiore contiene più unità che la cifra superiore, s'aggiungano a questa 10 unità, e si diminuisca di una unità la prima cifra significativa superiore delle colonne seguenti. In tal caso, ogni zero intermedio dovrà esser contato come 9 unità. Quando si sarà arrivato all'ultima colonna, si scriverà sotto la linea il resto, ch'ella avrà dato, e l'operazione sarà terminata.*

61. Operando nel modo precedente, è manifesto che dalle unità, decine, centinaja, ecc. del numero maggiore si vengono a sottrarre rispettivamente le unità, decine, centinaja, ecc. del numero minore. Quindi si vengono a sottrarre dal numero maggiore tutte le parti del numero minore, e per conseguenza si viene a sottrarre questo stesso numero.

CAPITOLO V.

MOLTIPLICAZIONE.

62. L'addizione di 2, 3, 4,...... numeri eguali fra loro, equivale a ripetere 2, 3, 4, ... volte l'uno di questi numeri, ovvero a renderlo 2, 3, 4,..... volte più grande, o pure a *raddoppiarlo*, *triplicarlo*, *quadruplicarlo*, ecc., o in fine a *moltiplicarlo* per 2, 3, 4,.... Quindi all'addizione sopraccennata è stato dato il nome di *moltiplicazione*, che è la terza operazione principale dell'Aritmetica.

63. *Definizione. La moltiplicazione è una operazione, con cui si ripete un numero tante volte, quante sono le unità contenute in un altro numero.*

64. Ogni moltiplicazione contiene sempre tre numeri, cioè, quello che si deve ripetere, e che dicesi *moltiplicando*, il numero che indica quante volte si ripete, e che chiamasi moltiplicatore; finalmente il risultato della operazione, che si appella *prodotto*.

Il moltiplicando ed il moltiplicatore congiuntamente considerati si chiamano *fattori*, perchè ambidue concorrono a formare il prodotto.

65. La moltiplicazione s'indica col segno $\times$, che significa

moltiplicato per. Se si volesse, per esempio, indicare che 8 moltiplicato per 6 dà per prodotto 48, si scriverà $8 \times 6 = 48$. Talvolta si mette un punto in vece del segno accennato, e si scrive $8 \cdot 6 = 48$.

66. Consistendo la moltiplicazione in un' addizione di più numeri eguali fra loro, ne segue che per ottenere il prodotto, basterebbe situare gli uni sotto agli altri tanti numeri eguali al moltiplicando, quante sono le unità contenute nel moltiplicatore, e fare in seguito la somma di tutt' i numeri accennati. Or è chiaro che questa maniera di operare sarebbe lunghissima, se il moltiplicatore fosse composto di più cifre; perciò si è procurato di abbreviarla; ed in questa abbreviazione consiste propriamente la *moltiplicazione*.

67. Possono presentarsi tre casi nella moltiplicazione: o il moltiplicando ed il moltiplicatore sono numeri semplici; o il primo è composto, e l' altro semplice, o in fine il moltiplicando è un numero qualunque, ed il moltiplicatore un numero composto. Ci occuperemo di questi tre casi negli articoli seguenti.

ARTICOLO I.

Moltiplicazione di un numero semplice per un altro numero semplice.

68. Il prodotto di due numeri semplici s' ottiene per mezzo di addizioni successive del medesimo numero: supponiamo, per esempio, che si debba moltiplicare 7 per 4: è manifesto che $7 \cdot 4 = 7 + 7 + 7 + 7 = 28$.

I prodotti della moltiplicazione di due numeri semplici qualunque si possono ottenere in un altro modo, cioè per mezzo di una tavola, che s' attribuisce a Pitagora.

TAVOLA DI PITAGORA.

Direzione orizzontale

Direzione verticale

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

La prima colonna orizzontale di questa tavola si forma con aggiungere 1 successivamente finchè s'arrivi al numero 9. La seconda con aggiungere 2 successivamente; la terza con aggiungere 3, e così in progresso. Volendo trovare, coll' ajuto di questa tavola, il prodotto di due numeri semplici, bisogna cercare il numero, che nel tempo stesso si ritrova nelle due colonne verticale ed orizzontale, che hanno rispettivamente in fronte il moltiplicando ed il moltiplicatore. Per esempio, il prodotto di 6 per 5 è 30, perchè questo numero si trova nel tempo stesso nella sesta colonna verticale e nella quinta colonna orizzontale,

69. Ma o si prescelga l'uno, o l' altro modo, a fine di ottenere i prodotti della moltiplicazione di due numeri semplici qualunque, è sempre necessario di mandare a memoria siffatti prodotti, se si voglia essere in istato di eseguire velocemente ed esattamente qualsivoglia moltiplicazione.

ARTICOLO II.

Moltiplicazione di un numero composto per un numero semplice.

70. *Sia proposto di moltiplicare il numero composto* 8459 *pel numero semplice* 7.

Ciò si riduce a ripetere 7 volte le 9 unità del moltiplicando, 7 volte le 5 decine, 7 volte le 4 centinaja, e 7 volte le 8 migliaja.

Disposti i due fattori come si vede qui di contro, si dirà: 7 volte 9 fanno 63, si scrive 3 al posto delle unità sotto la linea, e si ritiene 6: 7 volte 5, 35, e 6 di ritenuta, 41; si scrive 1, e si ritiene 4: 7 volte 4, 28, e 4 di ritenuta, 32; si scrive 2, e si ritiene 3. Finalmente, 7 volte 8, 56, e 3 di ritenuta, 59, che si scrive a sinistra della cifra precedente. L' operazione è terminata, ed il prodotto cercato è 59213.

```
 8459
    7
-----
59213
```

71. *Sia proposto in secondo luogo di moltiplicare* 47008 *per* 9.

Si dirà: 9 volte 8, 72; si scrive 2 sotto la linea, e si ritiene 7: 9 volte *o*, da' *o*, perchè zero ripetuto quante volte si vuole, non può dare altro che zero. Ma siccome nella prima operazione si sono ritenute 7 decine, così bisogna scriver queste al posto delle decine sotto la linea. In seguito, si dirà: 9 volte *o*, da' *o*; si scriverà *o* al posto delle centinaja, perchè è necessario conservare il posto, che queste occuperebbero, se ci fossero. Proseguendo si dirà: 9 volte 7, 63; si scrive 3, e si ritiene 6. Finalmente, 9 volte 4, 36, e 6 di ritenuta, 42, che si scrive a sinistra della cifra precedente. L'operazione è allora terminata, ed il prodotto richiesto è 423072.

```
 47008
     9
------
423072
```

72. Dalle cose precedenti si deduce che.

Per moltiplicare un numero composto per un numero semplice, bisogna moltiplicare successivamente le unità, decine, centinaja, ecc., del moltiplicando pel moltiplicatore; scrivere solamente le unità di ciascun prodotto parziale, e ritenere le decine, per aggiungerle al prodotto seguente, eccetto quelle dell'ultimo prodotto, che si scriverà come si sarà trovato.

73. È chiaro che operando nel modo precedente si viene a ripetere ciascuna parte del moltiplicando tante volte, quanto sono le unità contenute nel moltiplicatore; e però il moltiplicando sarà ripetuto questo stesso numero di volte, ed il risultato dovrà essere il prodotto richiesto.

ARTICOLO III.

Moltiplicazione d'un numero qualunque per un numero composto.

74. *Sia proposto di moltiplicare il numero* 2327 per 532.

Moltiplicare 2327 per 532 equivale a ripetere 2327 prima 2 volte, poi 30 volte, ed in fine 500 volte, ed a sommare i prodotti parziali, che si ottengono. Si dispone l'operazione come si vede qui sotto.

```
   2327
    532
-------
   4654
  6981
 11635
-------
1237964
```

Si comincia dal moltiplicare il moltiplicando per 2, prima cifra del moltiplicatore, ed il prodotto 4654 si scrive sotto la linea. Poi si moltiplica lo stesso moltiplicando per 3, seconda cifra del moltiplicatore, ed il prodotto 6981 si scrive sotto al primo, in modo che le unità, decine, e centinaja del secondo prodotto corrispondano alle decine, centinaja e migliaja del primo prodotto. Si situa in tal guisa il secondo prodotto parziale, perchè il prodotto di 2327 per le 3 decine del moltiplicatore, ossia per 30, è 69810: ma siccome lo zero non influisce nella somma, che deve farsi dei prodotti parziali, così si tralascia. In seguito, si moltiplica il moltiplicando per 5, terza cifra del moltiplicatore; ed il prodotto 11635 si situa sotto al secondo prodotto parziale nello stesso modo che questo è stato scritto sotto al primo. Una siffatta situazione deriva dal considerare che la detta cifra 5 dinota centinaja, onde il prodotto di 2327 per 500 è propriamente 1163500, ma si omettono gli zeri per la ragione sopraccennata. Finalmente, si sommano tutt' i prodotti parziali secondo l' ordine con cui sono scritti, e si ha il prodotto totale 1237964.

75. *Sia proposto in secondo luogo di moltiplicare* 526 *per* 307.

Si moltiplica primieramente tutto il moltiplicando per 7; il che dà per prodotto 3682. E poichè non vi sono decine nel moltiplicatore, si passa a moltiplicare 526 per 3, terza cifra del moltiplicatore, e si ha per prodotto, 1578. Essendo questo propriamente il terzo prodotto parziale, perchè il secondo si è omesso come inutile, si dovrà situare sotto al primo, come si è detto nell' esempio precedente, vale a dire che sporga a sinistra con due cifre al di fuori.

```
   526
   307
 ------
  3682
1578
 ------
161482
```

76. Dunque per moltiplicare un numero qualunque per un altro composto di più cifre:

Bisogna moltiplicare successivamente il moltiplicando per ciascuna cifra significativa del moltiplicatore con le regole esposte (n° 72, e 68) *badando di scrivere i prodotti parziali gli uni sotto agli altri, in modo che la prima cifra di ciascun prodotto sia situata sotto la cifra del moltiplicatore, che ha dato questo prodotto. Ciò fatto, si tiri una linea sotto all' ultimo prodotto parziale, e si sommino tutt' i prodotti; la somma sarà il prodotto totale.*

77. È manifesto che operando colla regola precedente, il moltiplicando viene ad essere ripetuto tante volte, quante sono le unità, le decine, le centinaja, ecc. contenute nel moltiplicatore, e per conseguenza viene ad essere moltiplicato per questo numero, ed il risultato dell' operazione dev' essere il prodotto, che si cerca.

CAPITOLO VI.

DIVISIONE.

78. Consistendo la moltiplicazione nel ripetere un numero tante volte, quante sono le unità contenute in un altro, è chiaro che l'operazione inversa dovrà esser quella di dividere un numero in tante parti eguali, quante sono le unità contenute in un altro; il che equivale a trovare quante volte un numero ne contiene un altro. Infatti, sia proposto di dividere 48 in 8 parti eguali: è evidente che la somma di queste parti dev' essere uguale a 48; per conseguenza s' avrà il valore di una delle parti accennate con determinare quante volte 48 contiene 8. Quindi si può definire la divisione nel modo che segue.

79. *Definizione. La divisione è una operazione, per mezzo della quale si trova quante volte un numero ne contiene un altro.*

80. Il numero da dividersi chiamasi *dividendo*, quello per cui si divide, *divisore*, ed il risultato dell' operazione, *quoziente*.

La divisione s' indica con mettere una linea, o due punti fra il dividendo ed il divisore. Volendosi. per esempio, indicare che 8 si deve dividere per 4, si scrive $\frac{8}{4}$, o pure 8 : 4. La linea, o i due punti, situati in tal modo fra il dividendo ed il divisore, significano *diviso per*.

81. Dalla difinizione precedente apparisce che il dividendo equivale sempre al prodotto del divisore pel quoziente. Infatti, se il quoziente è 6, per esempio, il divisore sarà contenuto nel dividendo 6 volte; per conseguenza il dividendo sarà eguale al divisore ripetuto 6 volte, vale a dire sarà il prodotto del divisore pel quoziente.

82. Nella divisione possono presentarsi tre casi. Il primo ha luogo quando il dividendo ed il divisore sono ambidue numeri semplici. Il secondo, quando il dividendo è un numero composto, ed il divisore è un numero semplice. Il terzo infine, quando il dividendo ed il divisore sono ambidue numeri composti. C' occuperemo di questi tre casi negli articoli seguenti.

ARTICOLO I.

Divisione di un numero semplice per un altro numero semplice.

83. Questo caso è semplicissimo, e non ha bisogno di regole. Per esempio, ognun vede che il quoziente di 8 diviso per 4 è 2, che quello di 9 diviso per 3 è 3, ecc...

Supponiamo ora che si debba dividere 9 per 4: è manifesto che 9 contiene 4 più di due volte, ma meno di tre; per conseguenza il vero quoziente è compreso tra 2 e 3, e non è *esatto*. In tal caso, *si scrive per quoziente il più piccolo de' due numeri, fra cui è il*

vero quoziente, *è vi si aggiunge il resto diviso pel numero divisore.*

Quindi $\frac{9}{4}=2+\frac{1}{4}$, che si scrive comunemente così: $\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$, sottintendendo il segno $+$; e questa espressione vuol dire che 9 diviso per 4 da' 2 per quoziente, e che resta ancora una delle unità del 9 da dividersi in quattro parti eguali. Laonde il *quoziente particolare* è 2, ed il *quoziente completo* è 2 ed un quarto di una unità.

84. Da ciò si deduce che *quando la divisione lascia un resto, il quale è necessariamente minore del divisore*, *il dividendo è eguale al prodotto del divisore moltiplicato pel quoziente*, *più questo resto*.

Così ripigliando l'esempio precedente, si trova $9=4\times2+1$. Giova notare che in questo luogo si parla del quoziente particolare, mentre più sopra (n.° 81) si tratta del quoziente completo.

In qual modo poi si potrebbe provare che il dividendo 9 è uguale al divisore 4 moltiplicato pel quoziente completo $2\frac{1}{4}$, lo vedremo in progresso, quando parleremo de' numeri fratti.

85. Un numero che può dividersi esattamente per un altro, si dice *moltiplice* di questo. Così, 8 è moltiplice di 4 e di 2; 12 è moltiplice di 6, di 4, di 3, e di 2. In particolare poi si dice che: 8 è *doppio* di 4, perchè 8 diviso per 4 dà per quoziente 2; e che è *quadruplo* di 2. Similmente si dice: che 12 è *doppio* di 6, *triplo* di 4, *quadruplo* di 3, *sestuplo* di 2, ecc...

ARTICOLO II.

Divisione d' un numero composto per un numero semplice.

86. Possono darsi due casi, *o che il dividendo sia minore del decuplo del divisore*, *o che sia maggiore*.

87. I *Caso. Sia proposto di dividere* 40 *per* 8.

In questo caso si può trovare il quoziente per mezzo della tavola di Pitagora. A tal fine, basta discendere nella colonna verticale, che ha in fronte il divisore 8, sino alla colonna orizzontale, ove si trova il dividendo 40: la cifra 5 posta in fronte di questa colonna è il quoziente richiesto.

Ma se il divisore fosse 7 in luogo di 8, allora bisognerà discendere nella settima colonna verticale, finchè s' arrivi al più grande multiplo di 7, il quale essendo 35, ne segue che il quoziente particolare di 40 diviso per 7 è 5.

Purtuttavolta, quando si sanno a memoria tutti i prodotti de' numeri semplici, si può evitare l' uso della tavola di Pitagora, e trovare ad un tratto il quoziente esatto, o particolare nel caso, di cui parliamo. E giova avvertire che solamente in questo modo si può essere in istato di eseguire velocemente ed esattamente qualsivoglia di quelle divisioni, di cui parleremo or ora.

88. II. *Caso. Sia proposto di dividere* 1168 *per* 4.

Si dispone l'operazione, come si vede qui di contro. Si dirà: 4 in 14 centinaja non è contenuto che tre centinaja di volte, si scrive 3 al quoziente, indi si moltiplica 3 per 4, ed il prodotto 12 si sottrae dal *primo dividendo parziale* 14: restano 2 centinaja, che colle 6 decine del dividendo fanno 26 decine, ch' è il *secondo dividendo parziale*. In seguito, si dirà: 4 in 26 è contenuto 6 decine di volte, si scrive 6 al quoziente, a destra della cifra precedente, poi si moltiplica 6 per 4, ed il prodotto 24 si sottrae da 26: restano 2 decine, che con le 8 unità del dividendo fanno 28 unità, ch' è il *terzo dividendo parziale*. E poichè il 4 è contenuto 7 volte in 28, senza resto, si scriverà 7 al quoziente, a destra della cifra precedente, ed il numero 367 sarà il quoziente richiesto.

```
1468 | 4
12   |----
---- | 367
 26
 24
----
  28
  28
----
   0
```

Infatti, è evidente che operando come sopra si scompone il dividendo 1468 in 12 centinaja, 24 decine, e 28 unità. Or, il divisore 4 è contenuto 300 volte nelle centinaja, 60 volte nelle decine, e 7 volte nelle unità; per conseguenza sarà contenuto nel dividendo 367 volte.

89. *Sia proposto in secondo luogo di dividere* 2128 *per* 7.

Si dirà: 7 in 21 entra 3 volte esattamente, si scrive 3 al quoziente, indi si moltiplica 3 per 7, ed il prodotto 21 si sottrae da 21. Si ha per resto 0, accanto al quale s'abbasserà la cifra 2 delle decine del dividendo, e s' avrà il secondo dividendo parziale 02, ossia 2. Ma questo dividendo non contiene il divisore, perciò il quoziente totale non ha decine; si deve dunque scrivere 0 al quoziente al luogo delle decine, ed abbassare la cifra seguente 8 del dividendo. In seguito si dirà: 7 in 28 entra 4 volte, si scriverà 4 al quoziente, e poi si moltiplicherà 4 per 7, ed il prodotto 28 tolto da 28 darà per resto 0. Quindi l' operazione è terminata, ed il quoziente esatto è 304.

```
2128 | 7
21   |----
---- | 304
 028
  28
----
   0
```

90. L' esempio precedente fa vedere che *quando uno de' dividendi parziali non contiene il divisore, bisogna abbassare la cifra seguente del dividendo, per formare un nuovo dividendo parziale.*

ARTICOLO III.

Divisione d' un numero composto per un altro numero composto.

91. Possono darsi due casi, secondo che *il quoziente è un numero semplice, o un numero composto*

92. I. *Caso.* Questo caso si presenta, o quando il dividendo ed il divisore hanno lo stesso numero di cifre, o quando il dividendo ha una cifra di più del divisore, ma la prima cifra a sinistra del di-

videndo è minore della prima cifra a sinistra del divisore. Infatti, in ambidue i casi, se il quoziente fosse un numero composto, dovrebb' essere per lo meno eguale a 10, ed allora il prodotto del quoziente pel divisore sarebbe maggiore del dividendo; il che non può sussistere.

93. Ciò premesso, *sia proposto di dividere* 2735 *per* 793.

Se si volesse vedere ad un tratto quante volte 793 è contenuto in 2735, ciò sarebbe assai difficile, soprattutto quando i numeri sono troppo grandi. Si opererà dunque nel modo che segue.

```
2735 | 793
2379 |-----
---- |  3
 356
```

Si dirà : la prima cifra 7 del divisore è contenuta 3 volte, nelle due prime cifre 27 del dividendo col resto 6, perchè 7 moltiplicato per 3 dà per prodotto 21. La cifra 6 messa innanzi alla cifra seguente 3 del dividendo dà 63; ma il 9 seconda cifra del divisore è contenuta più di 3 volte in 63 con un resto, il quale messo innanzi a 5, terza cifra del dividendo, darebbe un numero, in cui la terza cifra 3 del divisore sarebbe contenuta più di 3 volte, dunque tutto il divisore 793 è contenuto 3 volte nel dividendo 2735 con un resto. A fine di conoscere questo resto, si moltiplicherà il quoziente 3 pel divisore 793, ed il prodotto 2379 sottratto dal dividendo darà il resto richiesto, ch'è 356.

94. Operando nel modo precedente si vede che il dividendo 2735 si scompone in 21 centinaja, 27 decine, 9 unità, più 356 unità, vale a dire si è scomposto 2735 in due parti. La prima è 2379, che è un numero triplo del divisore, e la seconda 356, che non contiene affatto il divisore.

95. II. *Caso. Sia proposto di dividere* 273585 *per* 793.

Si separino con una virgola le cifre 2735 a sinistra del dividendo, che sono necessarie per contenere il divisore 793. Si divida il primo dividendo parziale 2735 pel divisore; il quoziente avrà una sola cifra, ch' è 3, e questa si troverà nel modo indicato più sopra (n.° 93.) Si moltiplichi 3 per 793, ed il prodotto 2379 si sottragga da 2735. Accanto al resto 356 s' abbassi la seguente cifra 8 del dividendo, ed il numero 3568, ch' è il secondo dividendo parziale, si divida pel divisore. Il quoziente 4 si moltiplichi pel divisore, ed il prodotto 3172 si sottragga dal secondo dividendo parziale. Allato al resto 396 s' abbassi l' ultima cifra 5 del dividendo, ed il terzo dividendo parziale 3965 si divida pel divisore. Il quoziente 5 si moltiplichi pel divisore, ed il prodotto 3965 si sottragga dal terzo dividendo parziale, il resto essendo zero, l' operazione sarà terminata, ed il quoziente richiesto è 345.

```
2735,85 | 793
2379    |-----
------- | 345
 3568
 3172
 ----
  3965
  3965
  ----
     0
```

Infatti, operando nel modo precedente, si vede che il dividendo 273585 si scompone in 2379 centinaja, 3172 decine, e 3965 uni-

tà. Si è trovato che il divisore 793 è contenuto 300 volte nella prima di queste tre parti, 40 volte nella seconda, e 5 volte nella terza; dunque è contenuto 345 volte in tutto il dividendo.

96. L'epilogo degli articoli precedenti conduce alla seguente regola generale.

Per dividere un numero per un altro, si scriva il divisore a destra del dividendo, separandoli con una linea verticale; indi si tiri sotto al divisore una linea orizzontale, che serve a separare il divisore dal quoziente.

Ciò fatto, si prendano sulla sinistra del dividendo tante cifre, quante sono necessarie per contenere il divisore S' avrà in tal modo un primo dividendo parziale. che si separerà con una virgola dalle rimanenti cifre del dividendo. Si divida questo dividendo parziale pel divisore, il quoziente avrà una sola cifra, e sarà quella delle più alte unità del quoziente medesimo. Si moltiplichi la cifra accennata pel divisore, ed il prodotto si sottragga dal primo dividendo parziale. Alla dritta del resto si cali la prima delle rimanenti cifre del dividendo, sulla quale si metta un punto a fine di ricordarsi che è stata abbassata. S' avrà allora un secondo dividendo parziale. che diviso pel divisore darà la seconda cifra del quoziente, che si scriverà a destra della prima In seguito, si opererà sul secondo dividendo parziale e sulla seconda cifra del quoziente come si è fatto sul primo dividendo parziale e sulla prima cifra del quoziente: e si continuerà l' operazione allo stesso modo finchè si sia abbassata l' ultima cifra del dividendo.

Se uno de' dividendi parziali risulta minore del divisore, si scriverà zero al quoziente. e s' abbasserà la cifra seguente del dividendo totale; il che darà un nuovo dividendo parziale, e l'operazione si continuerà come è stato detto.

CAPITOLO VII.

OSSERVAZIONI SULLE QUATTRO OPERAZIONI FONDAMENTALI DELL' ARITMETICA.

97. L' addizione, la sottrazione, la moltiplicazione, e la divisione sono le operazioni fondamentali di tutta l' Aritmetica; e però conviene, prima di andar oltre, fare intorno ad esse alcune osservazioni, che saranno utili in appresso, e faranno conoscere meglio la natura di siffatte operazioni.

ARTICOLO I.

Osservazioni sull' addizione.

98. Quando la somma delle cifre contenute in ciascuna colonna non eccede 9, si può indifferentemente cominciare l' operazione

dalla destra o dalla sinistra; vale a dire, dall'addizione delle unità semplici, o da quella delle unità della specie più alta. Ma quando una, o più di queste somme supera 9, e questo caso è il più frequente, allora riesce più comodo cominciare l'operazione dalla destra piuttosto che dalla sinistra. Infatti, se si cominciasse dalla sinistra, bisognerebbe tornare sui proprii passi, a fine di correggere una cifra, che si sarebbe già scritta, con aggiungervi tante unità quante sono le decine d'unità, che si hanno dalla somma delle cifre contenute nella colonna seguente. Ciò non ostante, si ha qualche volta bisogno di dover cominciare dalla sinistra, come si vedrà in appresso.

ARTICOLO II.

Osservazioni sulla sottrazione.

99. La sottrazione potrebbe farsi indifferentemente cominciando l'operazione a destra o a sinistra, se ciascuna cifra del sottrattore fosse minore della cifra corrispondente nel sottraendo. Ma quando ciò non accade, ed è questo il caso più frequente, allora divien necessario cominciare dalla destra. Infatti, allorchè una cifra del sottrattore è maggiore della cifra corrispondente nel sottraendo, la sottrazione parziale non può effettuarsi senza ricorrere all'impronto che si fa sulla prima cifra significativa del sottraendo, posta a sinistra di quella, su cui si opera. Dunque in ogni caso conviene cominciare l'operazione dalla destra.

100. Dalla natura della sottrazione risulta manifesto

1.° Se s' aggiunga o si tolga uno stesso numero al sottraendo ed al sottrattore, il residuo rimane lo stesso.

2.° Se il sottraendo cresce o diminuisce, il residuo pure cresce o diminuisce. Viceversa, se il sottrattore cresce o diminuisce, il residuo diminuisce nel primo caso, e cresce nel secondo.

101. L'osservazione precedente conduce ad una maniera di fare la sottrazione, che generalmente parlando riesce nella pratica più semplice e più comoda della maniera ordinaria. Essa consiste nel lasciare come si trova la cifra del sottraendo, su cui si è fatto un impronto, purchè s' accresce di una unità la cifra corrispondente del sottrattore. Supponiamo, per esempio, che si debba sottrarre 17459 da 30082: disposta l'operazione nel modo conosciuto

$$\begin{array}{r} 30082 \\ 17459 \\ \hline 12623 \end{array}$$

Si dirà: da 12 tolto 9, resta 3; da 8 tolto 6, resta 2; da 10 tolto 4, resta 6; da 9 tolto 7, resta 2: finalmente, da 3 tolto 2, resta 1, ed il residuo cercato è 12623.

Questa maniera di operare è utile soprattutto quando nel sottraendo si trovano uno o più zeri fra due cifre significative, per-

chè allora non si deve fare alcun cambiamento nelle cifre del sottraendo, come si è veduto nell' esempio precedente.

ARTICOLO III.

Osservazioni sulla moltiplicazione.

102. Riflettendo sul modo, che si tiene nel fare la moltiplicazione, si vede facilmente che le moltiplicazioni parziali del moltiplicaudo per ciascuna cifra del moltiplicatore, devono esser fatte necessariamente cominciando dalla destra, e non dalla sinistra. Ciò nasce dalle ritenute, che si fanno continuamente nel moltiplicare una cifra del moltiplicando per una cifra del moltiplicatore. Ma in quanto all' ordine de' prodotti parziali, questo può essere invertito, cominciando la moltiplicazione dalla prima cifra a sinistra del moltiplicatore. Operando in tal guisa, il prodotto totale rimane lo stesso, ma i prodotti parziali si troveranno disposti in ordine inverso, ed in modo che le decine del secondo cadono sotto le unità del primo, quelle del terzo sotto le unità del secondo, ecc., e però ciascun prodotto sporge verso la destra con una cifra al di fuori delle cifre di quello, che lo precede.

Sia proposto, per esempio, di moltiplicare 5402 per 368.

Cominciando l' operazione a sinistra del moltiplicatore, si trova il prodotto 16206, le cui unità si sono situate sotto le centinaja del moltiplicatore.

Nella seconda operazione, il prodotto 32412 si trova situato sotto al primo in modo che sporge con una cifra al di fuori del precedente, ecc....

```
 5402
  368
-------
16206
 32412
  43216
-------
1987936
```

103. *Nella moltiplicazione, si può sempre invertire l' ordine de' due fattori, senza alterare il prodotto.*

Infatti, supponiamo che si debba moltiplicare 4 per 5: ciò equivale a moltiplicare $1 + 1 + 1 + 1$ per 5; il che dà per prodotto $5 + 5 + 5 + 5$, vale a dire 5 ripetuto 4 volte, dunque il prodotto di 4 per 5 è uguale al prodotto di 5 per 4.

Potendosi questo ragionamento applicare a due numeri qualunque, la proposizione enunciata si trova dimostrata.

104. I segni (n.° 65), che servono ad indicare la moltiplicazione danno il modo di esprimere un numero per mezzo de' fattori, che lo producono. Così, in vece di 48 si può scrivere 6×8, o $6 \cdot 8$. In tal caso, la moltiplicazione di 48 per un altro numero 7, per esempio, si potrà considerare come la moltiplicazione de' tre fattori 6, 8, e 7, e scrivere $6 \cdot 8 \cdot 7 = 336$. Si vede poi facilmente che se in luogo di moltiplicare 48 per 7, si fosse moltiplicato 48 per 35, s' avrebbe un prodotto, che si potrebbe considerare come proveniente dalla moltiplicazione de' quattro fattori, 6, 8, 7, e 5; cosicchè, il prodotto di 48 per 35 può essere espresso da $6 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5$.

Quindi, se s' incontrano espressioni di questa natura, si dovrà primieramente trovare il prodotto de' due primi fattori, moltiplicare questo prodotto pel terzo fattore, il nuovo prodotto pel quarto, e così in progresso. Del resto non è necessario seguire nelle moltiplicazioni de' fattori l' ordine con cui sono dati, perchè vedremo or ora che in qualunque modo s' invertano questi fattori, il prodotto rimane sempre lo stesso.

105. *Il prodotto di più numeri non cambia, in qualunque ordine si facciano le moltiplicazioni.*

Supponiamo in primo luogo che i fattori dati siano tre, per esempio, 4, 3, e 5.

È evidente che

$$4 \cdot 3 = 4 + 4 + 4.$$

Moltiplicando per 5 queste due quantità eguali, s' avrà

$$4 \cdot 3 \cdot 5 = 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5.$$

Ma $4 \cdot 5$ preso tre volte equivale alla moltiplicazione di questo numero per 3, dunque

$$4 \cdot 3 \cdot 5 = 4 \cdot 5 \cdot 3.$$

Da ciò segue che nel prodotto de' fattori dati 4, 3, e 5, si può invertere l' ordine de' due ultimi, senza alterare il prodotto medesimo. Or si è dimostrato (n.° 103), che si poteva invertere anche l'ordine de' due primi fattori, dunque sarà.
$4 \cdot 3 . 5 = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 4 \cdot 5 \cdot 3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 3 . 5 . 4$, vale a dire, *che quando i fattori dati sono tre, si può invertere il loro ordine in tutt' i modi possibili, senza che il prodotto rimanga alterato.*

Supponiamo in secondo luogo che i fattori dati siano quattro, cioè 4, 3, 5, e 2. Il prodotto de' due primi è 12, perciò in virtù della dimostrazione precedente sarà

$$12 \cdot 5 \cdot 2 = 12 \cdot 2 \cdot 5,$$

ovvero, $4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5$.

Quindi anche nel caso di quattro fattori si può invertere l'ordine de' due ultimi, senza alterare il prodotto. Ma si è or ora dimostrato che si poteva invertere in tutt' i modi possibili l'ordine de' tre primi fattori, dunque dovrà essere

$$4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2 . 4 \cdot 3 \cdot 5.$$

Laonde il fattore 2, che trovavasi all' ultimo posto, può occupare successivamente quel posto che si vuole, senza che il prodotto rimanga alterato. Or ciò che si è detto pel fattore 2, si può applicare al nuovo fattore terminale 5, ed in seguito al fattore 3, ed al fattore 4, dunque il posto di ciascun fattore è arbitrario.

La dimostrazione precedente potrà applicarsi a qualsivoglia numero di fattori, e però il teorema proposto rimane dimostrato.

106. Da questo teorema si deduce che *per moltiplicare un numero pel prodotto di due o di più fattori, basta moltiplicare questo numero successivamente per ciascun fattore di esso prodotto.*

Supponiamo, per esempio, che si debba moltiplicare 13 per 18, che è il prodotto de'fattori 3 e 6; dico che moltiplicare 13 per 18 equivale a moltiplicare 13 per 3, ed il prodotto risultante per 6. Infatti, $13 \cdot 18 = 18 . 13$ (n° 103). Or nel secondo di questi due prodotti si può mettere $3 \cdot 6$ in luogo di 18, senza alterare il prodotto medesimo, perchè prima di moltiplicare $3 \cdot 6$ per 13 bisogna (n° 104) che sia stata eseguita la moltiplicazione di 3 per 6, dunque $13 \cdot 18 = 3 \cdot 6 \cdot 13$ · Ma si può invertere l' ordine de'fattori senza mutare il prodotto; per conseguenza dovrà essere

$$13 \cdot 18 = 13 \cdot 3 \cdot 6,$$

Che era quanto si doveva dimostrare.

107. Conseguenza del teorema precedente è la proposizione, che segue, la quale è utile nella pratica della moltiplicazione.

Il prodotto di due o più numeri terminati da zeri, equivale al prodotto delle cifre significative di questi numeri, alla cui destra s' aggiungono tanti zeri, quanti ve ne sono alla destra de'fattori.

Sia proposto, per esempio, di moltiplicare 800 per 90; si moltiplicherà 9 per 8, ed il prodotto cercato sarà 72000. Infatti, 800 è uguale a $8 \cdot 100$, e 90 a $9 \cdot 10$, dunque sarà $800 \times 90 = 8 \cdot 100 \cdot 9 \cdot 10 = 8 \cdot 9 \cdot 100 \cdot 10 = 72000$.

108. Dalle cose dimostrate (n.° 105 e 106) risulta che

Per moltiplicare un prodotto di due o di più fattori per un numero qualunque, basta moltiplicare uno de' fattori per questo numero, conservando gli altri fattori.

Sia proposto, per esempio, di moltiplicare 56, ch' è il prodotto de' fattori 8 e 7, per 2; dico che moltiplicare 56 per 2 equivale a moltiplicare 2 per 8, o per 7, conservando l'altro fattore. In fatti, è evidente che

$$56 \cdot 2 = 8 \cdot 7 \cdot 2 = 8 \cdot 14,$$

o pure

$$56 \cdot 2 = 8 \cdot 7 \cdot 2 = 8 \cdot 2 \cdot 7 = 16 \cdot 7 \cdot$$

109. Abbiamo veduto che quando varia l' ordine de' fattori, il prodotto non cambia; resta ora a conoscere le variazioni, che succedono nel prodotto, quando varia la grandezza de' fattori. Ci limiteremo al seguente teorema.

110. *Se il moltiplicando, o il moltiplicatore, si moltiplica o si divida per un numero, il prodotto sarà moltiplicato, o diviso, per lo stesso numero.*

Sia proposto, per esempio, di moltiplicare 36 per 4, e supponiamo che in vece di eseguire questa moltiplicazione si moltiplichi 36 per 12, che è un numero triplo di 4. Or, (n° 106) la moltiplicazione di 36 per 12 equivale a moltiplicare 36 per 4, ed il pro-

dotto risultante per 3; per conseguenza il prodotto di 36 per 12 è triplo del prodotto di 36 per 4. Dunque, se il moltiplicatore si moltiplica per un numero, il prodotto sarà moltiplicato per lo stesso numero. Con un ragionamento simile si dimostra che se il moltiplicatore si divide per un numero, il prodotto resta diviso per lo stesso numero. Ciò che si è detto del moltiplicatore si può applicare al moltiplicando, perchè si può invertere l'ordine de' fattori senza alterare il prodotto, dunque il teorema proposto rimane dimostrato.

111. Dal teorema precedente si deduce che

Il prodotto di due fattori non cambia, allorchè si moltiplica uno de' fattori per un numero, e si divide l' altro fattore per lo stesso numero.

Perocchè, in tal caso la seconda operazione distrugge l' effetto della prima.

112. Dalla definizione della moltiplicazione (n.° 63) apparisce che il prodotto si compone di tante parti eguali al moltiplicando, quante sono le unità contenute nel moltiplicatore. Quindi richiamando in questo luogo ciò che è stato detto (n.° 16) intorno alla formazione de' numeri per mezzo della successiva aggiunzione dell'unità, si conchiude che il prodotto si forma col moltiplicando come il moltiplicatore con l'unità. Così, il prodotto di 5 per 3 si forma ripetendo 5 tre volte, perchè si deve ripetere l' unità tre volte per formare il numero 3.

Dunque, si può definire la moltiplicazione in un altro modo, di cui faremo uso in appresso, ed è il seguente.

La moltiplicazione è una operazione, con cui, essendo dati due numeri, si forma un terzo numero, facendo sul primo dei numeri dati precisamente la stessa operazione, che si fa sull' unità per formare il secondo.

ARTICOLO IV.

Osservazioni sulla divisione.

113. Nelle tre prime operazioni dell' Aritmetica, il calcolo si fa cominciando a destra. Per l'opposto nella divisione si comincia a sinistra, affinchè i resti delle prime cifre possano unirsi alle seguenti. Se si cominciasse a destra, i resti delle prime cifre non si potrebbero unire alle cifre seguenti, e quindi l' operazione non potrebbe effettuarsi.

114. Giova ancora osservare che qualunque siano il dividendo ed il divisore, il numero totale delle cifre del quoziente è uguale al numero, che risulta aggiungendo uno al numero delle cifre del dividendo, che si trovano alla sinistra del primo dividendo parziale. Infatti, il primo dividendo parziale dà una cifra al quoziente, e ciascuna cifra del dividendo, che s'abbassa in seguito, dà una nuova cifra al quoziente medesimo.

115. Quando si è acquistata la pratica della divisione, si può

abbreviare molto il calcolo, effettuando nel tempo stesso le moltiplicazioni e le sottrazioni, che occorrono.

Sia proposto, per esempio, di dividere 15663072 per 3856.

15663.072	3856
23907	4062
7712	
0000	

Si dispone il calcolo, come si vede qui al margine.

Si prende 15663 per primo dividendo parziale, e si dice: 3 in 15 entra 4 volte, perciò si deve sottrarre 4 volte il divisore da 15663. In vece di moltiplicare 4 per 3856, e di scrivere il prodotto sotto 15663 per fare la sottrazione, si dirà: 4 volte 6 fanno 24, che sottratto da 33, dà il resto 9. Quindi a fine di rendere possibile la sottrazione parziale, si sono aggiunte tre decine alla cifra 3 del dividendo, ossia a tutto il dividendo; per conseguenza bisogna aggiungere anche tre decine al divisore, affinchè il resto totale non venga alterato (n.° 100); il che si fa aggiungendo 3 unità alla cifra seguente del divisore, o che vale lo stesso, ritenendo 3 pel prodotto seguente. Seguitando l'operazione si dirà: 4 volte 5 fanno 20, e 3 di ritenuta fanno 23, che sottratto da 26, dà il resto 3. Si ritiene 2, per la ragione indicata, e si dice: 4 volte 8 fanno 32, e 2 fanno 34, che tolto da 36, dà il resto 2. Si ritiene 3, e si dice: 4 volte 3 fanno 12, e 3 fanno 15; da 15 resta zero. Dunque il resto totale è 239.

Abbassando accanto a questo resto la cifra seguente 0 del dividendo, s'avrà il secondo dividendo parziale 2390. E poichè questo dividendo parziale non contiene il divisore, si scriverà 0 al quoziente, e s'abbasserà la cifra seguente 7 del dividendo. Ciò fatto, si continuerà l'operazione, e si troverà che il quoziente richiesto è 4062.

Dunque, per abbreviare la divisione, si dovrà ricorrere alla seguente regola.

Si sottraggano successivamente i prodotti parziali, che risultano dalla moltiplicazione di ciascuna cifra del divisore per la cifra del quoziente su cui si opera, dal numero d'unità dello stesso ordine contenute nel dividendo parziale, e s'accresca il prodotto seguente di tante unità, quante sono le decine, che sono state aggiunte al dividendo, a fine di rendere possibile la sottrazione.

116. Si fa facilmente la divisione, ed in un modo rapido, quando il divisore è numero semplice. Supponiamo, per esempio, che si debba dividere 7459 per 9.

7459	9
828	
7	

Si dispone il calcolo, come si vede qui di contro, poi si dice: la nona parte di 74 è 8, che si scrive sotto a 4, e resta 2, che messo innanzi a 5 da'25. La nona parte di 25 è 2, che si scrive sotto al 5, e resta 7, che messo innanzi a 9 da' 79. La nona parte di 79 è 8, che si scrive sotto al 9, e resta 7. L'operazione è terminata, e si ha 828 per quoziente, e 7 per resto.

117. Abbiam veduto (n.° 81) cha il dividendo è uguale al prodotto del divisore pel quoziente. Quindi si potrà definire la divisione in un altro modo, cioè:

La divisione è una operazione, con cui, essendo dato un prodotto ed uno de' fattori, si trova l' altro fattore.

Il prodotto corrisponde allora al dividendo, il fattore dato al divisore, e quello che si cerca al quoziente.

Sotto questo punto di vista l'operazione, che si chiama ***divisione*** si riduce alla ***scomposizione*** di un prodotto. allorchè si conosce uno de' fattori. Quindi per mantenere l' analogia fra le quattro operazioni fondamentali dell' Aritmetica bisogna far vedere come si effettua la scomposizione accennata ***direttamente***, cioè senza supporre che si conosca la regola data (n.° 96). Ci limiteremo ad un caso solo di divisione di cui si è già parlato in altro luogo (n.° 95).

118, Sia dunque proposto di dividere 273585 per 793. Ciò equivale a trovare il numero per cui bisogna moltiplicare 793 per avere al prodotto il numero 273585 Paragonando il divisore col dividendo si vede che il quoziente non può contenere migliaja, perchè se ne contenesse un solo, moltiplicando 1000 per 793, il prodotto sarebbe maggiore del dividendo. Dunque, il quoziente dovrà, in generale, contenere centinaja, decine, ed unità; e per conseguenza il dividendo proposto sarà la somma de' prodotti parziali del divisore moltiplicato per le centinaja, le decine, e le unità del quoziente.

Ciò premesso, bisognerà determinare in primo luogo il numero delle centinaja del quoziente.

Se si potesse staccare dal dividendo il prodotto del divisore moltiplicato per le centinaja del quoziente, è chiaro che dividendo questo prodotto pel divisore, s' avrebbe la cifra delle centinaja del quoziente. Ma queste moltiplicate pel divisore producono pure centinaja ; per conseguenza un tal prodotto dev' esser contenuto nelle 2735 centinaja del dividendo. Se dunque si divida 2735 per 793 colla regola data (n ° 93), s' avrà la cifra 3 delle centinaja del quoziente.

Passiamo in secondo luogo a determinare la cifra delle decine.

Per le cose dette più sopra e' manifesto che se dal dividendo si sottrae il prodotto del divisore per le centinaja del quoziente, il resto sarà la somma de' prodotti parziali del divisore per le decine ed unità del quoziente. Si sottraggano dunque dal dividendo 273585 le 2379 centinaja, ossia 237900, che si hanno dalla moltiplicazione del divisore 793 per le 3 centinaja del quoziente, e s avrà il resto 35685. Or il prodotto delle decine del quoziente pel divisore non può contenere che decine, dunque un tal prodotto dev' esser contenuto nelle 3568 decine del resto accennato. Se dunque si divida 3568 per 793 colla regola data (n.° 93), s' avrà il numero 4, che sarà la cifra delle decine del quoziente.

Finalmente, resta a trovare in terzo luogo la cifra delle unità.

Or per trovare le decine si è sottratto dal primo dividendo il prodotto del divisore per le centinaja del quoziente, ed in seguito si sono divise le decine del resto pel divisore ; dunque per determinare la cifra delle unità del quoziente, si dovrà sottrarre dal se-

condo dividendo 35685 il prodotto 31720 del divisore 793 per le 4 decine del quoziente, e dividere in seguito il resto 3965 per 793; il che da' 5. E poichè il prodotto di 793 per 5 dà il numero 3965, perciò 5 è la cifra delle unità del quoziente, e l'operazione è terminata.

Dalla dimostrazione fatta fin qui si deduce facilmente la regola generale della divisione riportata(n.° 96).

118. Potendosi considerare il dividendo come un prodotto, di cui il divisore ed il quoziente sono i due fattori, ne segue che

Se, senza alterare il divisore, si moltiplica o si divide il dividendo per un numero, il quoziente sarà moltiplicato o diviso per lo stesso numero.

Infatti, in virtù del cambiamento accennato, il quoziente moltiplicato pel divisore deve riprodurre un dividendo, che sarà un certo numero di volte più grande o più piccolo del primo; e però, non essendosi alterato il divisore, è necessario che il quoziente sia divenuto questo stesso numero di volte più grande o più piccolo, vale a dire che sia moltiplicato o diviso per lo stesso numero, per cui il dividendo è stato moltiplicato o diviso.

Viceversa, se, senza alterare il dividendo, si moltiplica o si divide il divisore per un numero, il quoziente sarà diviso o moltiplicato per lo stesso numero

Perocchè, non essendosi alterato il dividendo, la moltiplicazione del divisore pel quoziente non potrebbe riprodurlo, se il quoziente medesimo non si trovasse diviso nel primo caso, e moltiplicato nel secondo per quello stesso numero, con cui è stato moltiplicato o diviso il divisore.

120. Dalla precedente osservazione apparisce che

Se si moltiplicano o si dividono il dividendo ed il divisore per uno stesso numero, il quoziente non resta alterato.

Infatti, in tal caso il quoziente viene ad essere nel tempo stesse moltiplicato e diviso per uno stesso numero, e per conseguenza non soffre alcun cambiamento.

121. Quest' ultima osservazione conduce alla seguente, che è utile nella pratica della divisione:

Se il dividendo ed il divisore sono terminati da zeri, si può sopprimere a destra di ambidue un egual numero di zeri, senza alterare il quoziente.

Così 72000 diviso per 900 dà lo stesso quoziente che darebbe 720 diviso per 9.

122. Finalmente, richiamando in questo luogo ciò che abbiam detto intorno alla formazione del prodotto (n.° 112), si può conchiudere che

Il dividendo si forma per mezzo del quoziente come il divisore per mezzo dell' unità.

Così se il dividendo è 12, il divisore 4, ed il quoziente 3; il divisore 4 si forma prendendo l' unità quattro volte; ed il dividendo 12 si forma prendendo il quoziente 3 pure quattro volte.

CAPITOLO VIII.

PROVE DELLE QUATTRO OPERAZIONI FONDAMENTALI DELL' ARITMETICA.

122. *Definizione. Si chiama prova di una operazione una seconda operazione, che si fa per esser sicuri dell'esattezza del risultato ottenuto colla prima.*

Da questa definizione apparisce che la prova di una operazione essendo essa stessa una operazione, avrebbe bisogno di un'altra prova. Quindi parlando a rigore non si può conchiudere dalla prova di una operazione che questa sia esatta. Nondimeno, le circostanze, che dovrebbero avverarsi, affinchè una prova fosse falsa, sono assai difficili ad accadere. Quindi la probabilità, che proviene dalla prova di una operazione, si può considerare quasi come equivalente alla certezza. Ed ecco perchè quando si è fatta una operazione, si ricorre alla prova di essa.

ARTICOLO I.

Prova dell' addizione.

124. La prova dell' addizione si può fare in tre modi diversi come si vedrà nelle regole seguenti.

125. *Regola 1.ª Per verificare se un'addizione è stata ben fatta, basta rifarla operando da bàsso in alto, se prima era stata fatta da alto in basso, e viceversa. Se nella seconda operazione si trova un risultato identico a quello della prima, l' addizione sarà esatta.*

126. *Regola 2.ª Si separi con una linea il primo de'numeri, che si sono sommati; indi si faccia la somma de' numeri rimanenti, e si sottragga dalla somma già trovata, se l' operazione è stata ben fatta, il residuo dovrà esser eguale al primo numero, che si è separato.*

127. *Regola 3.ª Si faccia la somma di nuovo, cominciando a sinistra, di ciascuna colonna de' numeri proposti, poi si tolga la somma ottenuta in ultimo luogo da quella, che si trova sotto la linea: si scrivano i resti, che si trovano, e s'aggiungano come tante decine alla colonna seguente a destra. Se l'operazione è stata ben fatta, il resto nell' ultima colonna dev' esser zero.*

Applicheremo questa regola all'esempio, che sta qui di contro

Applicheremo questa regola all'esempio, che sta qui di contro	789 526
Si sommano primieramente i numeri contenuti nella prima colonna a sinistra, la quale dà 16. Si sottrae questo numero da 17, ed il resto 1 si scrive sotto al 7.	468 ——— 1783
Questo resto è ciò che è stato ritenuto sulla colonna	120

delle decine nella operazione primitiva. La colonna seguente dà per somma 16, che si sottrae da 18, il quale risulta da 8, che tro-

vasi sotto la linea, unito ad 1, che proviene dalla colonna precedente a sinistra: il resto 2 si scrive sotto alla cifra 8. Finalmente, la terza colonna dà 23 per somma, che si sottrae da 23, il quale risulta dal numero 3, che trovasi sotto la linea, unito a 2, che proviene dalla colonna precedente a sinistra; il resto essendo zero, ne segue che l' operazione è stata ben fatta.

128. La dimostrazione delle regole precedenti è manifesta.

ARTICOLO II.

Prova della sottrazione,

129. *La prova della sottrazione si fa addizionando il sottrattore col residuo: se si trova una somma eguale al sottraendo, l'operazione sarà stata ben fatta.*

Perocchè, per la definizione della sottrazione, il sottraendo dev' esser eguale al sottrattore più il resto.

ARTICOLO III.

Prova della moltiplicazione.

130. Si è dimostrato (n.° 103) che nella moltiplicazione si può invertere l'ordine de' fattori senza alterare il prodotto. Quindi

Per fare la prova della moltiplicazione, basta moltiplicare il moltiplicatore pel moltiplicando; e se si ritrova lo stesso prodotto, si potrà conchiudere che l' operazione è stata ben fatta.

131. Poichè nella moltiplicazione, il prodotto può esser considerato come un dividendo, il moltiplicando come il divisore o il quoziente, ed moltiplicatore come il quoziente o il divisore, ne segue che s' avrà un' altra prova della moltiplicazione:

Dividendo il prodotto per uno de' fattori. Se l'operazione è stata ben fatta, si dovrà ritrovare per quoziente l' altro fattore.

ARTICOLO IV.

Prova della divisione.

132. Essendo il dividendo eguale al prodotto del divisore pel quoziente, più il resto (n.° 84), ne segue che

Per fare la prova della divisione, bisogna moltiplicare il divisore pel quoziente, ed aggiungere il resto al prodotto, che s'ottiene. Se la somma è eguale al dividendo, si può conchiudere che l'operazione è stata ben fatta.

133. Si ha ancora un' altra prova della divisione con moltiplicare o dividere il dividendo ed il divisore per uno stesso numero. Se l' operazione è stata ben fatta, il nuovo dividendo diviso pel nuovo divisore dovrà dare un quoziente identico a quello che si era già trovato.

CAPITOLO IX.

DELLE POTENZE E DELLE RADICI IN GENERALE

134. *Definizione* I. *Si chiama potenza il prodotto della moltiplicazione di più numeri eguali fra loro.*

135. Se i fattori eguali sono due, il prodotto dicesi *seconda potenza*, o *quadrato*; se sono tre, *terza potenza* o *cubo*; se sono quattro, *quarta potenza*; se cinque, *quinta potenza*, ecc.

Così, $3 \cdot 3$, ossia 9, è la seconda potenza, o il quadrato di 3; $3 \cdot 3 \cdot 3$, ossia 27, è la terza potenza, o il cubo di 3; $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, ossia 81, è la quarta potenza di 3. ecc.

136. Invece di scrivere $3 \cdot 3$, $3 \cdot 3 \cdot 3$, $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, ecc. si scrive per brevità: 3^2, 3^3, 3^4, ecc., e si pronunzia: 3 *elevato a quadrato*, 3 *elevato a cubo*, 3 *elevato a quarta potenza*, ecc.

Le cifre 2, 3, 4, ecc., che si mettono a destra di un numero, ed un poco al di sopra, per indicare quante volte questo numero si deve prendere come fattore, si chiamano *esponenti*.

Il numero di questi fattori costituisce il *grado della potenza*; e però l'esponente indica il grado della potenza.

Giova osservare che la *prima potenza* di un numero è questo stesso numero. Il suo esponente sarebbe 1, ma non si scrive.

137. *Definizione* II. *Ogni numero rispetto alla sua potenza dicesi radice.*

Così essendo 9 la seconda potenza, o il quadrato di 3, sarà 3 la *radice seconda*, o la *radice quadrata* di 3. Similmente, essendo 27 la terza potenza, o il cubo di 3, sarà 3 la *radice terza*, o la *radice cubica* di 27. Proseguendo allo stesso modo, sarà 2 la *radice quarta* di 16, perchè 16 è la quarta potenza di 2. ecc.

138. Essendosi immaginato l'esponente per indicare che un numero doveva essere elevato ad una potenza di un certo grado, era naturale che si fosse cercato il modo di esprimere che da un numero si doveva *estrarre* la radice di un certo grado. A tal uopo, è stato trovato il segno $\sqrt{}$, ch' equivale alla lettera R, e che si chiama *radicale*. Il numero, da cui si deve estrarre la radice, si fa precedere dal segno accennato, e si segna poi nell'apertura delle due linee il *grado o l'indice della radice*. Così, $\sqrt[3]{8}$ significa che da 8 si deve estrarre la radice cubica, e si pronunzia: *radice terza o cubica* di 8. Similmente, $\sqrt[4]{6}$ s'enuncia dicendo: *radice quarta di* 6, ecc.

Quando si vuol indicare una semplice estrazione di radice quadrata, si scrive solamente innanzi al numero il radicale, senza l'indice. Per esempio, $\sqrt{9}$ significa che da 9 si deve estrarre la radice quadrata, e s'enuncia dicendo: *radice quadrata di* 9, o più semplicemente, *radice di* 9.

139. La formazione della potenza di qualunque grado di un

numero proposto, non esige alcuna operazione particolare, perchè tutto si riduce a fare tante molti plicazioni, quante vengono indicate dal grado della potenza, diminuito di una unità. Ma non succede lo stesso rispetto alla estrazione della radice da un dato numero; poichè in tal caso bisogna ricorrere ad una operazione essenzialmente diversa da quelle, che fin quì sono state esposte.

140, In ciò che segue ci limiteremo a parlare solamente della estrazione della radice quadrata, e della radice cubica, rimettendo all'*Algebra* l'estrazione delle radici de' gradi più elevati. (c). Or è manifesto che quando si propone di estrarre la radice quadrata, o cubica da un dato numero, questo si considera come un quadrato, o un cubo di un altro numero, cioè come il prodotto della moltiplicazione di questo secondo numero preso due volte, o tre volte come fattore; per conseguenza non si potrà mai arrivare a scoprire il procedimento da tenersi per estrarre la radice quadrata, o cubica di un numero dato, se prima non si conosca la composizione del quadrato, o del cubo di un numero, ossia la composizione delle sue parti; precisamente, come abbiam fatto (n.° 117), dove partendo dalla composizione di un prodotto per mezzo de' prodotti parziali siamo andati alla scomposizione di questo prodotto, ossia alla operazione, ch'è stata chiamata *divisione*. Quindi nel capitolo seguente ci occuperemo della composizione del quadrato.

CAPITOLO X.

COMPOSIZIONE DEL QUADRATO.

141. Per conoscere la composizione del quadrato di un numero qualunque, è necessario che si conoscano primieramente i quadrati de' numeri semplici: e però distingueremo due casi nella composizione accennata.

ARTICOLO I.

Composizione del quadrato di un numero semplice.

142. Per mezzo della tavola di Pitagora s' arriva facilmente a conoscere il quadrato di un numero semplice.

Infatti, i nove primi numeri

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

hanno rispettivamente per quadrati i numeri

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

(c) L' *Algebra* è una parte delle scienze matematiche, che tratta della quantità discreta in un modo generale, mentre l' Aritmetica ne tratta in un modo particolare, ed assai limitato.

Quindi segue che i numeri della seconda linea hanno rispettivamente per radici quadrate i numeri della prima.

Sapendosi fare i quadrati de' numeri semplici, si sapranno anche fare i quadrati de' numeri composti da una sola cifra significativa e da zeri. Così, essendo 1 il quadrato di 1, il quadrato di 10 sarà 100, quello di 100 sarà 10000, di 1000 sarà 1000000, ecc.. Similmente, essendo 4 il quadrato di 2, quello di 20 sarà 400, e di 30 sarà 900, ecc...

143. Dalle cose precedenti si deduce che non ogni numero è *quadrato perfetto*, vale a dire che non ogni numero si può considerare come prodotto dalla moltiplicazione di un altro numero per se stesso. Così, il numero 53 non è numero quadrato, perchè si trova compreso fra 49 e 64, ossia fra i quadrati di 7 e di 8; e per conseguenza non può esistere alcun numero intero che moltiplicato per se stesso producea 53. Quindi dal numero 53 non si potrà mai estrarre la radice *esatta*, ma solamente la radice *approssimativa*, cioè quella del massimo numero quadrato, che si contiene in 53, ovvero quella del numero 49.

ARTICOLO II.

Composizione del quadrato d' un numero composto.

144. Possiamo ora passare alla composizione del quadrato di un numero qualunque.

Il quadrato d' un numero composto di decine, ed unità, è uguale al quadrato delle decine, più il doppio prodotto delle decine per le unità, più il quadrato delle unità.

Per dimostrare questo teorema, prenderemo un numero composto di decine ed unità, che sia, per esempio, 14. Or essendo $14 = 10 + 4$, è chiaro che s' avrà il quadrato di 14, o moltiplicando 14 per se stesso, o moltiplicando $10 + 4$ per $10 + 4$. La prima moltplicazione non farebbe conoscere la composizione del quadrato di 14, perchè sommando i due prodotti parziali, che si ottengono, non resta alcuna traccia de' quadrati delle decine e delle unità. a cagione del sistema di numerazione, il quale dà alle cifre un valore locale. Quindi bisogna ricorrere alla seconda moltiplicazione, perchè in questa le decine si trovano staccate dalle unità, e perciò si possono conoscere le parti, che compongono il prodotto. Ciò premesso, è evidente che la moltiplicazione di $10+4$ per $10+4$ si riduce a moltiplicare $10 + 4$ prima per 10, e poi per 4, ed a sommare i due prodotti.

Ma $10 + 4$ moltiplicato per 10 dà $100 + 40$, e $10 + 4$ moltiplicato per 4 dà $40 + 16$, dunque riunendo i quattro prodotti si trova che il quadrato di $10 + 4$, ossia di 14, è uguale a 100 più due volte 40 più 16, ossia

$$14^2 = 100 + 2 \cdot 40 + 16^2$$

o pure $14^2 = 10^2 + 2 \cdot 40 + 4^2$, vale a dire: è uguale al quadrato delle decine, più il doppio prodotto delle decine per le unità, più il quadrato delle unità, secondo che si doveva dimostrare.

145. La dimostrazione precedente può applicarsi a qualunque numero, e però il teorema or ora dimostrato ha luogo per qualsivoglia numero. Se si volesse, per esempio, conoscere la composizione del quadrato del numero 437, si dovrà considerare questo numero come composto di 43 decine, e di 7 unità, vale a dire come eguale a $430 + 7$. Con la dimostrazione precedente si potrà provare che il quadrato di 437 è uguale al quadrato di 43 decine, più il doppio prodotto di 43 decine per 7 unità, più il quadrato di queste 7 unità.

146. Dal teorema precedente si deduce che

La differenza fra i quadrati di due numeri interi consecutivi, è uguale al doppio del più piccolo di questi numeri più una unità.

Infatti, si prenda un numero qualunque, per esempio, 8, e vi si aggiunga una unità, s'avrà il numero $8 + 1$, ossia 9, il cui quadrato si comporrà del quadrato di 8, del doppio prodotto di 8 moltiplicato per 1, e del quadrato di 1, e però il quadrato di 9 è eguale al quadrato di 8, più il doppio di 8, più l'unità; dal che poi si deduce che la differenza fra i quadrati di 8 e di 9 è uguale al doppio di 8, più l'unità; e però il teorema proposto rimane dimostrato.

147. Essendo 17 la differenza esistente fra i quadrati di 8 e di 9, ossia fra 64 e 81, ne segue che fra questi due numeri si trovano compresi 16 numeri interi, i quali non sono quadrati perfetti. Quindi apparisce che nella serie de' numeri naturali 1, 2, 3, ecc., indefinitamente, si trovano pochissimi numeri, che sono quadrati perfetti.

148. Giova infine osservare che

Il quadrato di un numero ha il doppio, o il doppio meno 1, delle cifre di questo numero.

Perocchè, i quadrati di 10, 100, 1000, ecc. sono rispettivamente 100, 10000, 1000000, ecc., vale a dire 1 seguito da due volte tanti zeri, quanti ve ne sono nella radice. Quindi il quadrato di un numero, che ha una sola cifra, deve avere 1 o 2 cifre, perchè si trova compreso fra i quadrati di 1 e di 10, ossia fra 1 e 100. Similmente si dimostra che il quadrato di un numero, che ha due cifre, deve avere 3 o 4 cifre, perchè si trova compreso fra 100 e 10000, ecc....

CAPITOLO XI.

ESTRAZIONE DELLA RADICE QUADRATA.

149. Abbiam veduto (n.° 148) che il quadrato di un numero può avere il doppio, o il doppio meno 1, delle cifre di questo numero; per conseguenza la radice quadrata di ogni numero minore di 100 dev'essere minore di 10, cioè dev' esser espressa da una

sola cifra. Per l' opposto, la radice quadrata di ogni numero maggiore di 100 dev' esser maggiore di 10, ossia deve contenere decine ed unità. Quindi bisogna distinguere due casi nell' estrazione della radice quadrata.

ARTICOLO I.

Estrazione della radice quadrata de' numeri minori di 100.

150. Se il numero proposto è quadrato perfetto, la sua radice si trova facilmente per mezzo del quadro riportato (n.° 142). Così si troverà che la radice quadrata di 49 è 7, di 64 è 8, ecc. E qui s'avverta che il quadro accennato deve sapersi a memoria, se si voglia essere in istato di fare velocemente ed esattamente qualsivoglia estrazione di radice quadrata.

151. Quando il numero proposto non è quadrato perfetto, vedemmo (n.° 143) che in tal caso non si può avere la radice esatta, ma soltanto la radice approssimata, cioè la radice del più gran quadrato contenuto nel numero proposto. Così, trovammo che la radice prossima di 53 è 7: ora poi aggiungiamo che questa radice è esatta *per meno di una unità*, vale a dire che la differenza tra la radice prossima e la radice vera è minore di 1. Infatti, il numero 53 è compreso fra 49 e 64; per conseguenza la sua radice è maggiore di 7 e minore di 8. Quindi, la differenza tra la radice di 53 e ciascuno de' numeri 7 e 8, è minore di 1, che è la differenza di questi numeri. Vedremo poi a suo luogo che la radice quadrata di 53, e di ogni numero, che non è quadrato perfetto, non può esser espressa esattamente non solo in numeri interi, ma neppure in numeri fratti.

ARTICOLO II.

Estrazione della radice quadrata de' numeri maggiori di 100.

152. Per fissare le idee supporremo in primo luogo che il numero, da cui si deve estrarre la radice quadrata, non abbia più di *quattro* cifre.

153. *Sia proposto di estrarre la radice quadrata dal numero* 2209.

Si dispone il calcolo, come si vede qui al margine:

```
22,09 | 47
16    |----
----- | 87
60,9  |  7
60 9
-----
0
```

Supposto che il numero 2209 sia un quadrato perfetto, si può considerare come composto di tre parti, cioè: del quadrato delle decine della radice, del doppio prodotto delle decine per le unità, e del quadrato delle unità della radice. Ma il quadrato delle decine della radice è un numero esatto di centinaja (n.° 142), per conseguenza dev'esser

contenuto nelle 22 centinaja del numero proposto. Riflettendo poi che il più gran quadrato contenuto in 22 è 16, la cui radice è 4, si conchiuderà che 4 è la cifra delle decine della radice. Resta ora a trovare la cifra delle unità: a tal uopo, si sottragga 16 da 22, ossia 1600 da 2209, il resto 609 dovrà contenere il doppio delle decine moltiplicato per le unità, ed il quadrato delle unità. Ma il doppio delle decine moltiplicato per le unità dà al prodotto un numero esatto di decine, dunque questo prodotto dev' essere contenuto nelle 60 decine del resto 609 Quindi se si divide 60 per 8, che è il doppio delle decine della radice, il quoziente 7 sarà la cifra delle unità della radice, perchè quando si conosce un prodotto ed uno de' fattori, la divisione fa trovare l' altro fattore (n.° 117). Se non che bisogna osservare che la cifra accennata potrebbe essere più grande della vera, perchè 60 non solo contiene il doppio prodotto delle decine per le unità, ma anche le decine, che si potranno avere dal quadrato delle unità, e dal resto, ch'esiste quando il numero proposto non è quadrato perfetto.

Quindi potendo essere il dividendo più grande di quello che dovrebbe, il quoziente potrebbe essere più grande del vero, e per conseguenza la cifra delle unità della radice potrebbe essere più grande della vera. Convien dunque assicurarsi che la cifra delle unità non è più grande della vera. A tal fine si scriverà questa cifra a destra del doppio delle decine della radice, ed il numero 87, che ne risulta, si moltiplicherà per la stessa cifra; il prodotto 609 sarà evidentemente eguale al doppio delle decine moltiplicato per le unità, più il quadrato delle unità. Ma queste due parti devono esser contenute nel resto 609. dunque la loro somma dovrà esser tale che si possa sottrarre da questo resto. Se questa sottrazione fosse impossibile, allora si conchiuderà che la cifra trovata è più grande della vera, e però bisognerà diminuirla di una o di più unità, finchè la sottrazione, di cui è parola, divenga possibile. Nel nostro caso, una siffatta sottrazione dà zero per resto; per conseguenza il numero proposto è un quadrato perfetto, la cui radice è 47.

154 Il precedente ragionamento può applicarsi a qualsivoglia numero. Infatti, esso conduce a questa conseguenza, cioè che per estrarre la radice quadrata da un numero, bisogna che si sappia estrarre la radice del più gran quadrato contenuto nelle centinaja di questo numero. Quindi se il numero proposto non ha più di *sei* cifre, le sue centinaja non avranno più di *quattro* cifre; e però si potrà estrarre la radice del più gran quadrato contenuto in esse centinaja nel modo più sopra indicato (n.° 153), che farà conoscere le decine della radice, poi le unità della radice medesima. Similmente, se il numero proposto non ha più di *otto* cifre, le sue centinaja non avranno più di *sei* cifre; e per conseguenza si possono determinare le decine della radice, indi le unità, e così in progresso si ragionerà per un numero, che avesse meno di *dieci* cifre, di *dodici*, di *quattordici*, ecc....

155. Dalle cose precedenti si deduce la seguente regola generale per estrarre la radice quadrata da un numero maggiore di 100. *Si disponga primieramente il calcolo come se si dovesse fare una divisione, lasciando libero il luogo del divisore per la radice; poi si divida il numero proposto da destra a sinistra in classi, ciascuna di due cifre. Ciò fatto, si estragga la radice dal più gran quadrato contenuto nella prima classe a sinistra, la quale potrà non avere che una sola cifra, e si scriva la radice trovata nel luogo indicato. Si faccia in seguito il quadrato di questa radice, e si tolga dalla prima classe a sinistra. Accanto al resto s' abbassi la classe, che segue immediatamente, da cui si separi l' ultima cifra a destra con una virgola, o con un punto.*

Si prenda il doppio della radice trovata, e si divida per questo doppio il resto unito alla prima cifra della classe abbassata: il quoziente darà la seconda cifra della radice. A fine di assicurarsi che questa cifra non è più grande della vera, si scriverà a destra del doppio della radice trovata, ed il numero, che risulta, si moltiplicherà per la cifra medesima; il prodotto dovrà esser tale che si possa sottrarre dal numero formato dal primo resto e dalle cifre della seconda classe abbassata. Accanto al resto di questa sottrazione s' abbassi la terza classe, di cui si separi con una virgola, o con un punto l' ultima cifra a destra, e si prosegua l' operazione come sopra, finchè si siano abbassate tutte le classi. La radice sarà esatta, se l' ultimo resto è zero, altrimenti sarà approssimata, ossia sarà la radice del più gran quadrato contenuto nel numero proposto.

156. A fine di rischiarare vieppiù questa regola, stimiamo opportuno di applicarla ai due esempj, che seguono.

157. *Sia proposto di estrarre la radice quadrata dal numero* 223729.

22,37,29	473
16	——
——	87
63,7	7
60,9	——
——	943
282,9	3
282 9	——
——	
0	

Si dispone l' operazione come si vede qui al margine.

Si comincia dall' operare sulle due prime classi a sinistra come si è fatto nel primo esempio sul numero 2209; s' avranno in tal modo le due prime cifre della radice, vale a dire s' avrà il numero 47, che sarà la radice del più gran quadrato contenuto nelle centinaja del numero proposto. Accanto al resto 28 s' abbasserà la seguente classe 29, il numero 2829, che risulta, contiene il doppio delle 47 decine della radice per le unità, ed il quadrato di queste unità. Si separi con una virgola la cifra 9, che non può far parte del doppio prod tto delle decine per le unità, e si divida 282 per 94, che è il doppio delle 47 decine: il quoziente 3 si scriva accanto a 94, e si moltiplichi 943 per 3. E poichè il prodotto, che si ottiene, è uguale a 2829, si conchiude che 473 è la radice esatta del numero proposto.

158. *Sia proposto di estrarre la radice quadrata dal numero* 3247359.

Operando come sopra si trova 1 per la prima cifra della radice, che raddoppiata dà il numero 2, pel quale bisogna dividere le due prime cifre 22 del resto. Ma 22 diviso per 2 dà 11 al quozien-te, cioè un numero di due cifre, dunque questo quoziente è troppo grande per la ragione addotta (n.° 153); perciò si deve mettere 9 al quoziente. Or 9 scritto accanto a 2, doppio della cifra trovata, dà 29, il quale moltiplicato per 9 dà 261, numero maggiore di 224, per conseguenza neppur 9 è la cifra richiesta. Si proverà allora 8 ; e poichè 28 moltiplicato per 8 da' 224; si conchiuderà che 8 è la seconda cifra della radice. Per trovare la terza cifra, accanto al resto, che è zero, s' abbasserà la terza classe 73, e si separerà con una virgola la cifra 3, e si dividerà 07 per 36, che è il doppio delle cifre trovate ; ma questa divisione non si può fare, dunque la terza cifra richiesta è zero, che si scriverà alla radice. Ciò fatto, per trovare la quarta cifra, s'osserverà che il resto che lascia l' operazione precedente, è 73, per conseguenza accanto a questo si deve abbassare l' ultima classe 59, e separare con una virgola la cifra 9. In seguito si dividerà 735 per 360, che è il doppio di 180, ed il quoziente 2 sarà la quarta cifra richiesta L'operazione dà il résto 155, per cui il numero proposto non è quadrato perfetto, e 1802 è la radice del più gran quadrato contenuto in detto numero, vale a dire è la radice esatta del numero 3247204, che differisce di 155 dal numero proposto.

3,24,73,59	1802
1	——
——	28
22,4	8
22 4	——
——	3602
07,35,9	2
7 20 4	——
——	
15 5	

CAPITOLO XII.

COMPOSIZIONE DEL CUBO.

159. La composizione del cubo di un numero qualunque dipende dalla conoscenza de' cubi de' numeri semplici, e però in ciò che segue distingueremo questi due casi.

ARTICOLO I.

Composizione del cubo di un numero semplice.

160. Il cubo di un numero semplice s' ottiene facilmente colla moltiplicazione, prendendo questo numero tre volte come fattore. Quindi i cubi de' numeri

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

sono rispettivamente

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729.

Viceversa, i primi numeri sono le *radici cubiche* de' secondi.

161. Quando si conoscono i cubi de' numeri semplici, si conosceranno ancora i cubi de' numeri composti di una sola cifra seguita da uno o più zeri, perchè il cubo di un numero siffatto si ottiene con aggiungere al cubo della cifra significativa il triplo de' zeri da cui è seguita (n.° 139). Così, essendo 1 il cubo di 1, i cubi de' numeri 10, 100, 1000, ecc. saranno rispettivamente 1000, 1000000, 1000000000, ecc. Similmente, essendo 8 il cubo di 2, e 27 quello di 3, sarà 8000 il cubo di 20, e 27000 quello di 30, ecc...

162. Da ciò segue che non ogni numero è cubo perfetto. Per esempio, il numero 16 non è cubo perfetto, perchè trovasi compreso fra 8 e 27, ossia fra il cubo di 2 e quello di 3; e però non può esistere alcun numero intero che moltiplicato due volte per se stesso dia 16.

ARTICOLO II.

Composizione del cubo di un numero composto.

163. Possiamo ora passare alla composizione del cubo di un numero qualunque.

Il cubo d' un numero composto di decine, ed unità, è uguale al cubo delle decine, più il triplo quadrato delle decine per le unità, più il triplo quadrato delle unità per le decine, più il cubo delle unità.

Si prenda un numero composto di decine, e di unità, e sia, per esempio, 14, ch' è uguale a $10+4$, bisogna moltiplicare il quadrato di $10+4$ per $10+4$. Ma il quadrato di $10+4$ è $10^2+2\cdot10\cdot4+4^2$, dunque si deve moltiplicare questo quadrato per $10+4$; o che vale lo stesso, si deve moltiplicare prima per 10, e poi per 4, e fare la somma de' due prodotti, che risultano.

Or 10^2 moltiplicato per 10 dà il cubo di 10, $2\cdot10\cdot4$ moltiplicato per 10 da' due volte il quadrato di 10 moltiplicato per 4, e 4^2 moltiplicato per 10 da' $10\cdot4^2$, dunque il primo prodotto è uguale al cubo delle decine, più due volte il quadrato delle decine moltiplicato per le unità più una volta il quadrato delle unità moltiplicato per le decine. Il secondo prodotto si ottiene facilmente cominciando la moltiplicazione dal quadrato delle unità, mentre per avere il primo si è cominciato dal quadrato delle decine. Infatti, diviene allora manifesto che il secondo prodotto dovrà esser formato come il primo, con un semplice cambiamento di nomi, cioè si dovrà dire per le unità quello che nel primo prodotto è stato detto per le decine. Quindi il secondo prodotto dovrà essere uguale al cubo delle unità, più due volte il quadrato delle unità per le decine, più una volta le unità pel quadrato delle decine. Se dunque si fa la somma de' due prodotti parziali, si troverà che il prodotto

totale, cioè il cubo di $10+4$, è uguale al cubo di 10, più tre volte il quadrato di 10 moltiplicato per 4, più tre volte il quadrato di 4 moltiplicato per 10, più il cubo di 4. E poichè la dimostrazione precedente si può applicare a qualunque numero composto, ne segue che la proposizione enunciata rimane dimostrata.

164. Dal teorema precedente si deduce che

La differenza de' cubi di due numeri interi consecutivi, è uguale al triplo quadrato del numero più piccolo, più il triplo di questo medesimo numero, più una unità.

Infatti, si prenda un numero qualunque 8, per esempio, e vi si aggiunga 1, si avrà il numero $8+1$, ossia 9. Ragionando come più sopra (n.° 163) si troverà che il cubo di 9 è uguale al cubo di 8, più il triplo quadrato di 8 moltiplicato per 1, più il triplo quadrato di 1 moltiplicato per 8, più il cubo di 1. Ma il triplo quadrato di 8 moltiplicato per 1 è uguale al triplo quadrato di 8, il triplo quadrato di 1 moltiplicato per 8 è uguale a tre volte 8, ed il cubo di 1 è 1, dunque la differenza fra il cubo di 8 e quello di 9 è eguale al triplo quadrato di 8, più il triplo di 8, più 1; il che si doveva dimostrare.

165. Essendo 217 la differenza de' numeri 729 e 512, cioè fra i cubi di 9 e di 8, ne segue che fra questi due numeri si trovano compresi 216 numeri, che non sono cubi perfetti. Quindi si vede che nella serie naturale de'numeri la maggior parte non sono cubi perfetti.

166. Finalmente, giova osservare che

Il cubo d' un numero ha il triplo, o il triplo meno **1**, *o meno* **2**, *delle cifre di questo numero*

Perocchè, da ciò che è stato detto (n.° 161) il cubo di un numero composto di due cifre, ossia di un numero compreso fra 10 e 100, cade fra 1000 e 1000000; per conseguenza è composto di quattro, di cinque, o di sei cifre. Lo stesso ragionamento potendosi applicare ad un numero composto di tre cifre, di quattro, ecc, si conchiude che la proposizione enunciata è dimostrata,

CAPITOLO XIII.

ESTRAZIONE DELLA RADICE CUBICA.

167. Dal teorema precedente (n ° 166) risulta che il cubo di ogni numero semplice è minore di 1000, perchè avendo una sola cifra il suo cubo può avere al più tre cifre. Per l' opposto, il cubo di ogni numero composto, più grande di 10, dev' esser maggiore di 1000. Quindi distingueremo due casi nella estrazione della radice cubica.

ARTICOLO I.

Estrazione della radice cubica de' numeri minori di 1000.

168. Se il numero proposto è cubo perfetto, la sua radice si trova facilmente per mezzo del quadro (n.° 160). Così, si vedrà subito cho la radice cubica di 64 è 4, di 216 è 6, ecc.

È poi necessario di mandare a memoria il quadro suddetto, altrimenti non si potrà estrarre velocemente ed esattamente la radice cubica da qualsivoglia numero.

169. Quando il numero proposto non è cubo perfetto, vedemmo (n.° 165) che in tal caso non si può avere la radice esatta, ma solamente la radice approssimata, cioè quella del più gran cubo contenuto nel numero proposto. Così, la radice cubica di 630 non si può determinare esattamente, perchè questo numero cade fra 512 e 729. ossia fra il cubo di 8 e il cubo di 9. Quindi sarà 8 la radice approssimata di 630, e l' errore sarà al di sotto di 1, perchè la radice vera cade tra 8 e 9. Si vedrà poi a suo luogo che la radice cubica di 630, e di ogni altro numero, che non è cubo perfetto, non può esprimersi esattamente non solo in numeri interi, ma neanco in numeri fratti.

ARTICOLO II.

Estrazione della radice cubica de' numeri maggiori di 1000.

170. Per fissare le idee supporremo in primo luogo che il numero, da cui si deve estrarre la radice cubica, non abbia più di *sei* cifre.

171. *Sia proposto di estrarre la radice cubica dal numero* 103823.

Si dispone l'operazione, come si vede qui di contro.

Supponendo che il numero proposto sia un cubo perfetto, dovrà contenere il cubo delle decine della radice, più il triplo quadrato delle decine per le unità, più il triplo quadrato delle unità per le decine, più il cubo delle unità della radice (n.° 163). Ma il cubo di 10 è 1000, dunque il cubo delle decine della radice dev' esser contenuto nelle 103 migliaja del numero proposto. Riflettendo poi che il più gran cubo contenuto in 103 è 64, la cui radice cubica è 4, si conchiuderà che 4 è la cifra delle decine della radice.

103,823	47
64	48
398,23	
1038 23	
0	

Resta ora a trovare la cifra delle unità : a tal uopo si sottragga 64 da 103, ossia 64000 da 103823, il resto 39823 dovrà contenere il triplo quadrato delle decine per le unità, il triplo quadrato delle unità per le decine, ed il cubo delle unità. Ma il triplo qua-

drato delle decine dà centinaja, dunque il triplo quadrato delle 4 decine della radice moltiplicato per le unità della stessa radice dev' essere contenuto nelle 398 centinaja del resto accennato. Quindi se si divida 398 per 48, ch' è il triplo del quadrato di 4, il quoziente 8 sarà la cifra delle unità. che nondimeno bisogna verificare. Infatti, le 398 centinaja possono contenere, oltre il triplo quadrato delle decine per le unita, le centinaja, che provengono dalle due rimanenti parti del cubo, e dal resto, se mai esiste: per conseguenza il quoziente di 398 per 48 potrebbe esser maggiore di quello che dovrebbe essere, abbenchè non possa eccedere 9. Per verificare se la cifra 8 non è più grande della vera, è chiaro che basta fare il cubo di 48, e sottrarlo dal numero proposto 103823; si trova che questo cubo è 110592, il quale non si può sottrarre dal numero proposto. Quindi si diminuisce 8 di una unità, e si fa il cubo di 47, il quale essendo 103823, fa vedere che 47 è la radice cubica esatta del numero proposto.

172. Richiamando in questo luogo ciò che è stato detto (n.° 154), si vedrà facilmente che il ragionamento fatto qui sopra si può applicare successivamente ai numeri, che non hanno più di 9, di 12, di 15, ecc. cifre, e che per conseguenza è generale.

173. Si può quindi stabilire la seguente regola per estrarre la radice cubica di un numero maggiore di 1000.

Si divida il numero proposto, da destra a sinistra, in classi, ciascuna di tre cifre; l' ultima a sinistra potrà avere una, due, o tre cifre. Ciò fatto. s' estragga la radice del più gran cubo contenuto nella prima classe a sinistra, e si sottragga questo cubo da questa prima classe. Accanto al resto s' abbassi la prima cifra della seconda classe. e si divida il numero, che risulta, pel triplo quadrato della cifra trovata della radice; si scriva il quoziente a destra di questa cifra; e si faccia il cubo delle due cifre trovate: se questo cubo è maggiore delle due prime classi del numero proposto, si diminuisca il quoziente di una, o di più unità, finchè s' ottenga un cubo che possa sottrarsi dalle due classi accennate. Fatta la sottrazione, s' abbassi accanto al resto la prima cifra della terza classe, e si divida il numero, che risulta, pel triplo quadrato delle due cifre già trovate: si scriva il quoziente a destra di queste cifre, e questo quoziente dev' esser tale che elevando a cubo le tre cifre trovate, si possa sottrarre il prodotto dalle prime tre classi. Fatta la sottrazione, s' abbassi accanto al resto la prima cifra della quarta classe. e si prosegua l' operazione come sopra finchè si siano abbassate tutte le classi.

174. A fine di mettere più in chiaro la regola precedente, l' applicheremo all' esempio seguente.

175. *Sia proposto di estrarre la radice cubica dal numero* 105823817.

Dopo aver disposta l'operazione, come nell' esempio precedente, si estrarrà la radice cubica dalle due prime classi a sinistra, e si troverà il numero 47. Si prenda il cubo di 47, cioè 103823, e si sottragga dalle due prime classi. Accanto al resto 2000 s'abbassi la prima cifra 8 delle terza classe e si divida 20008 pel triplo quadrato di 47, cioè per 6627. Il quoziente 3 si verifica elevando 473 a cubo, ed essendo questo cubo eguale al numero proposto, si conchiuderà che 473 è la radice cercata.

105,823,817	473
64	———
———	48
41 8	6627
103 823	
———	
20008	
105823817	
———	
0	

176. Se il numero proposto avesse una quarta classe, si continuerebbe l'operazione come si è fatto per la terza, badando di mettere uno zero alla radice, se il numero da dividersi non contenesse quello per cui deve esser diviso. In tal caso, s'abbasserebbe la prima cifra della classe seguente, e si opererebbe su questa prima cifra unita al resto, come si è fatto per le classi precedenti.

CAPITOLO XIV.

OSSERVAZIONI SU I NUMERI QUADRATI E CUBI, E SULLE LORO RADICI.

177. Ad imitazione di ciò che abbiam fatto per le prime quattro operazioni dell'Aritmetica, stimiamo di dover fare in questo luogo alcune osservazioni sui numeri quadrati e cubi, e sulle loro radici, che serviranno a far meglio conoscere la natura di questi numeri, e a render più semplici in *alcuni casi le operazioni relative agli stessi numeri*.

ARTICOLO I.

Osservazioni sui numeri quadrati e cubi.

178. L'elevazione a quadrato o a cubo di un numero si fa ordinariamente per mezzo della moltiplicazione; ma giova talvolta farla colla composizione del quadrato o del cubo. Supponiamo, che si debba elevare a quadrato il numero 34. Si dispone l'operazione come si vede qui di contro; e si dice: il quadrato di 3 è 9, che si scrive: il doppio di 3, cioè 6, moltiplicato per 4 da' 24: si mette questo numero sotto al 9, in modo che sporga con una cifra in fuori verso la destra. In seguito si dirà: il quadrato di 4 è 16, che si scriverà sotto a 24 come questo è stato scritto sotto a 9. La ragione di questa disposizione risulta dall' essersi tralasciati due zeri alla destra del 9, ed uno a quella di 24. La somma 1156 è il quadrato richiesto.

```
 9
 24
  16
 ----
 1156
```

Il cubo di 34 si forma con disporre le diverse parti del cubo precisamente come abbiam fatto per quelle del quadrato.

179. *Un numero terminato da una delle quattro cifre* 2, 3, 7, 8, *non può essere un quadrato perfetto.*

Infatti, dalla composizione del quadrato di un numero, che ha più di una cifra, risulta che le unità semplici quadrate non possono provenire che dal quadrato delle unità della radice. Or se si formano i quadrati de' nove primi numeri, si vede che niuno di essi è terminato dalle cifre 2, 3, 7, 8; e però la proposizione enunciata rimane dimostrata..

180. *Un numero terminato da* 5 *è un quadrato perfetto solamente quando la cifra delle sue decine è* 2.

Ciò si deduce anche dalla composizione del quadrato di un numero di due o più cifre. Infatti, quando il quadrato proposto è terminato da 5, la sua radice deve terminare pure colla cifra 5, perchè da una parte l' ultima cifra del quadrato delle unità termina il quadrato, e dall altra si sa che fra i quadrati de' nove primi numeri solamente quello di 5 termina con 5. Or essendo 5 la cifra delle unità della radice, il doppio prodotto delle decine per le unità sarà il prodotto di 2 volte 5 per le decine, o di 10 per le decine; e però un tal prodotto sarà terminato da due zeri. Ma il quadrato delle decine è pure terminato da due zeri, dunque le due ultime cifre del quadrato totale devono esser quelle del quadrato di 5, ossia devono formare il numero 25.

181. *Ogni numero terminato da un numero impari di zeri non può essere un quadrato perfetto.*

Perocchè, la sua radice o è terminata da una cifra significativa o da zeri. Nel primo caso il quadrato non termina con alcuno zero; nel secondo poi è terminato da un numero pari di zeri.

ARTICOLO II.

Osservazioni sulla radice quadrata.

182. Nell' estrarre la radice quadrata da un numero, si comincia l' operazione a sinistra, perchè non si può determinare precisamente in qual parte del numero proposto si ritrova il quadrato delle unità: infatti, questo quadrato contiene in generale decine, le quali si combinano con quelle, che provengono dal doppio prodotto delle decine per le unità. Per l' opposto, abbiam veduto che si può sempre determinare in un modo preciso in qual parte del numero proposto si trova il quadrato delle decine, e però l' operazione sopraddetta deve cominciare a sinistra, e non a destra, analogamente a ciò che è stato detto per la divisione.

183. Dal teorema (n.° 148) apparisce che

Il numero delle cifre della radice è uguale al numero delle classi di due cifre, che si possono formare nel numero, da cui si vuole estrarre la radice medesima.

184. Le diverse cifre della radice, eccetto la prima, si determinano per mezzo della divisione. Or vedemmo che il quoziente potrebbe essere più grande del vero; e che in tal caso bisognava diminuirlo di una o più unità. Ma è facile il vedere che una siffatta diminuzione fa correre il rischio di mettere un quoziente troppo piccolo; per conseguenza è necessario di avere una regola, onde riconoscere questo caso.

Supponiamo che la radice trovata sia troppo piccola di una unità, allora il numero proposto, cioè quello da cui si deve estrarre la radice, dovrà contenere il quadrato del numero, che risulta aggiungendo una unità alla radice trovata, vale a dire, dovrà contenere il quadrato della radice trovata, più il doppio di questa radice, più una unità.

Ma siccome si è già sottratto il quadrato della radice trovata, ne segue che il resto dovrà contenere il doppio di questa radice, più l' unità. Dunque

La cifra scritta alla radice sarà esatta, quando il resto corrispondente sarà minore del doppio della radice trovata, più una unità.

A fine di rischiarare ciò che precede, si riprenda l' esempio riportato (n.° 152), e si supponga che in vece di 7 si sia scritto 6 alla radice. Volendo vedere se la radice trovata 46 è esatta, si esaminerà il resto 93. il quale risulta dal sottrarre da 609 il prodotto 516 di 86 per 6, o che vale lo stesso dal sottrarre da 2209 il quadrato di 46, che è 2116. Or il resto 93 è uguale al doppio della radice trovata 46, più una unità, dunque questa radice non è esatta, e dev' esser accresciuta di una unità, ossia la radice vera è 47.

22,09	46
16	86
60,9	6
51 6	
9 3	

185. È manifesto che la prova dell' estrazione della radice quadrata si dovrà fare elevando la radice trovata a quadrato, cui si aggiungerà il resto, se esiste. La somma dovrà essere eguale al numero, da cui è stata estratta la radice medesima.

ARTICOLO III.

Osservazioni sulla radice cubica.

186. Nell' estrarre la radice cubica da un numero, l' operazione comincia a sinistra, e non a destra, perchè non si può determinare precisamente in qual parte del numero proposto si ritrova il cubo delle unità. Per l' opposto, è sempre possibile il determinare in qual parte del numero accennato si trova precisamente il cubo delle decine.

187. Dal teorema (n.° 166) si deduce che

Il numero delle cifre della radice dev' esser eguale al numero delle classi di tre cifre, in cui si può dividere il numero, da cui si vuole estrarre la radice medesima.

188. Si è veduto (n.° 171) che la prima cifra della radice si trova estraendo la radice del più gran cubo contenuto nella prima classe a sinistra del numero proposto. Le rimanenti cifre si trovano per mezzo della divisione; è però hanno bisogno di essere verificate. Una siffatta verifica si può fare in un modo diverso da quello esposto (n.° 173); e merita di esser conosciuta, perchè è più semplice, e ristabilisce l'analogia tra l'estrazione della radice quadrata e quella della radice cubica. Supponiamo, per esempio, che si debba estrarre la radice cubica dal numero 21952.

Si dispone l'operazione come si vede qui al margine.

La prima cifra della radice è 2, il cui cubo 8 sottratto da 21 da' per resto 13. Accanto a questo resto s'abbassi la seconda classe 952, e si separino con una virgola le due ultime cifre a destra; poi si divida 139 per 12, che è il triplo quadrato di 2, il quoziente è 9. Per verificare questa cifra dicemmo (n.° 173) che bisognava fare il cubo di 29, e sottrarlo dal numero proposto. Ma è più semplice operare come segue.

21,952	28	
8		
	12	12
139,52	54	48
139 52	81	64
0	1821	1744
	9	8
	16389	13952

Si scriva sotto 12, ossia 1200, il triplo prodotto della cifra trovata 2 per la nuova cifra 9, ossia 540, poi sotto questo prodotto si metta 81, cioè il quadrato della nuova cifra: gli zeri non si scrivono, perchè non influiscono nella somma de' tre numeri accennati, che è 1821. Ciò fatto, si moltiplichi questa somma per la stessa nuova cifra 9, il prodotto 16389 dovrà essere evidentemente uguale al triplo quadrato delle 2 decine della radice per le 9 unità di questa stessa radice, più il triplo quadrato delle unità per le decine, più il cubo delle unità. Quindi il prodotto accennato dovrebbe esser tale da potersi sottrarre da 13952: ma questa sottrazione è impossibile, dunque 9 è una cifra troppo grande. Si farà allora sopra 8 l'operazione indicata: e poichè si trova per risultato 13952 si conchiuderà che 8 è la cifra richiesta.

È manifesto che la stessa operazione può applicarsi anche quando il numero proposto avesse tre classi, quattro classi, ecc...

Da ciò si deduce la seguente regola.

Quando si è trovata una cifra della radice con dividere le centinaja del resto pel triplo quadrato delle cifre già trovate; e si vuol provare se la cifra accennata non è troppo grande, bisogna primieramente fare l'addizione del triplo quadrato delle cifre trovate, del triplo prodotto di queste cifre per la cifra, che si deve provare, e del quadrato di questa medesima cifra. La somma di questi tre numeri moltiplicata per la cifra, che si vuole verificare, deve dare al prodotto un numero tale che si possa sottrarre dal resto sopraddetto.

189. Quando la sottrazione accennata sarà impossibile, si dovrà diminuire il quoziente soprannominato di una o più unità, ed allora

può accadere che si scriva alla radice una cifra più piccola della vera. Quindi è necessario di avere una regola, con cui si possa conoscere che la cifra scritta alla radice non è troppo piccola.

A tal fine, supponiamo che la cifra trovata differisca dalla vera di una unità; allora la radice trovata dovrà essere accresciuta di una unità; e per conseguenza il numero, da cui si deve estrarre la radice, dovrà contenere il cubo della radice trovata, più il triplo quadrato di questa radice, più il triplo della radice medesima, più una unità (n.° 163). Ma il cubo della radice trovata n' è stato sottratto, dunque il resto dovrà ancora contenere il triplo quadrato della radice trovata, più il triplo di questa radice, più una unità. Dunque.

La cifra scritta alla radice non sarà più piccola della vera, se il resto corrispondente sarà minore del triplo quadrato della radice trovata, più il triplo di questa radice, più una unità.

Per dare un' applicazione di questa regola, si supponga che nell'esempio precedente dopo di aver verificato che la cifra 9 era più grande della vera, si fosse scritto 7 alla radice, volendo verificare se questa cifra non è più piccola della vera, bisogna fare rispetto a 7 l' operazione fatta per provare la cifra 9, la quale operazione si riduce in sostanza a sottrarre il cubo di 27; che è 19683, dal numero proposto, il resto sarà il numero 2869. Or questo resto è uguale al triplo quadrato di 27, più il triplo pi 27, più 1, dunque la cifra 7 è più piccola della vera di una unità; e però la radice richiesta non è 27, ma 28.

190. Si vede facilmente che la prova dell' estrazione della radice cubica si fa con elevare a cubo la radice trovata, e con aggiungere ad esso il resto, se esiste. La somma dovrà essere eguale al numero, da cui si è estratta la radice medesima.

CAPITOLO XV.

PROPRIETA' DE' NUMERI.

191. Fin qui abbiamo esposto le principali operazioni, che spettano al *calcolo de' numeri interi*. Ma vi sono altre operazioni non meno importanti, le quali poggiano sopra alcune proprietà de'numeri, per conseguenza in questo capitolo c' occuperemo ad esporre siffatte proprietà.

ARTICOLO I.

Caratteri di divisibilità di un numero per diversi altri numeri.

192. *Definizione* I. Un numero si dice *divisibile* per un altro, quando la loro divisione non lascia resto.

193. Vedemmo (n.° 83) che il primo de' due numeri accennati si chiama *moltiplice*, o pure *multiplo* del secondo. Qui aggiunge-

remo che il secondo si appella *fattore*. *divisore*, *summoltiplice* o *summoltiplo*, o in fine *parte aliquota* del primo.

194. *Quando un numero è divisibile per un altro; tutti i multipli del primo sono anche divisibili pel secondo.*

Infatti, se si moltiplica il dividendo per un numero, senza alterare il divisore, il quoziente sarà moltiplicato per lo stesso numero (n.° 118); e però la divisione si farà senza resto.

Così, essendo 16 divisibile per 8, il suo triplo 48 dovrà esser anche divisibile per 8, perchè nel primo caso il quoziente essendo 2, nel secondo caso dovrà essere il triplo di 2.

195. *Se un numero divide due o più numeri, dividerà anche la loro somma.*

Perocchè, ciascuno de' numeri proposti è uguale al divisore dato preso un certo numero di volte. Quindi la loro somma sarà eguale a questo stesso divisore ripetuto un certo numero di volte, ossia sarà divisibile pel divisore accennato.

196. *Un numero, che divide due altri numeri, divide anche la loro differenza.*

Infatti, ciascuno de' numeri proposti è uguale al divisore dato preso un certo numero di volte: dunque la loro differenza è uguale a questo divisore ripetuto un certo numero di volte, ossia è divisibile pel divisore accennato.

197. *Definizione* II. Un numero si dice *pari* qnando è divisibile per 2. Si chiama poi *impari* o *dispari*, quando non è divisibile per 2.

198. *Ogni numero terminato da una cifra pari ha solo la proprietà di essere un numero pari.*

Si prenda un numero terminato da una cifra pari, per esempio, il numero 476 Scomponendo questo numero in decine ed unità, s' avrà $476 = 470 + 6$, o pure $476 = 47 \times 10 + 6$. Ma 10 è divisibile per 2, dunque lo sarà ancora 470, che è multiplo di 10; è poi per ipotesi 6 divisibile per 2, per conseguenza (n.° 195), tutto il numero 476 dovrà essere divisibile per 2, ossia sarà un numero pari. Or si vede che se il numero proposto fosse terminato da una cifra impari, la conclusione precedente non potrebbe più aver luogo; e però la proposizione enunciata rimane dimostrata.

199. *Il prodotto di due numeri impari è sempre un numero impari.*

Infatti, un numero impari è uguale ad un numero pari accresciuto di una unità; e per conseguenza il prodotto di due numeri impari è uguale al prodotto del moltiplicando per un numero pari, più lo stesso moltiplicando; vale a dire è uguale ad un numero pari accresciuto di una unità; e però il prodotto accennato è un numero impari.

200. *Un numero è divisibile per 5, quando è terminato da 0, o da 5.*

Infatti, un numero terminato da zero è un multiplo di 10, e però sarà divisibile per 5. Quando poi un numero è terminato da 5,

scomponendolo in decine ed unità, si vede che queste due parti sono ambedue divisibili per 5; e per conseguenza la loro somma, ossia il numero proposto dovrà esser pure divisibile per 5

201. *Un numero è divisibile per 4, quando le sue due ultime cifre a destra formano un numero divisibile per 4.*

Infatti, si scomponga il numero proposto in centinaja ed unità. La parte formata dalle unità è per ipotesi divisibile per 4: la parte formata dalle centinaja è pure divisibile per 4, perchè ogni numero di centinaja è un multiplo di 100, e 100 è divisibile per 4.

202. Scomponendo un numero in migliaja ed unità, in decine di migliaja ed unità, ecc., si troverà che *un numero è divisibile per 8 per 16, ecc., quando le 3, le 4, ec. ultime cifre a destra formano un numero divisibile per 8, per 16 ecc.*

203. *Un numero è divisibile per 9, quando la somma delle cifre è divisibile per 9.*

Infatti. se si moltiplicano per 9 i numeri. **1, 11, 111, 1111**, ecc· i prodotti sono 9, 99, 999, 9999, ecc. Quindi aggiungendo una unità a ciascun prodotto, il risultato sarà espresso dall' unità seguita da tanti zeri, quante sono le cifre **1** del moltiplicando, vale a dire s' avranno i numeri 10, 100, 1000, 10000, ecc. Dunque *una unità di un ordine qualunque* si può considerare come un multiplo di 9 con l' aggiunta di una unità semplice; e per conseguenza 2. 3, 4,... unità di un ordine qualunque equivalgono ad un multiplo di 9 con l' aggiunta di 2, 3, 4,... unità semplici.

Ciò premesso, si concepisca il numero proposto decomposto nelle sue diverse collezioni di unità; è chiaro che ciascuna di esse sarà un multiplo di 9 coll'aggiunta della sua cifra significativa, considerata come rappresentante unità semplici; e per conseguenza il numero accennato è un multiplo di 9 coll' aggiunta della somma delle sue cifre significative. Quindi se questa somma è divisibile per 9, anche il numero proposto sarà divisibile per 9,

204. Dalla dimostrazione precedente apparisce *che il resto della divisione di un numero qualunque per 9 è quello stesso, che si ottiene dividendo per 9 la somma delle sue cifre, considerate come rappresentanti unità semplici.*

205. *Un numero è divisibile per 3, quando la somma delle sue cifre è divisibile per 3.*

Infatti, se si moltiplicano per 3 i numeri 3, 33, 333, ecc..., i prodotti sono 9, 99, 999. ecc., quindi aggiungendo una unità a ciascun prodotto, il risultato sarà espresso dall' unità seguita da tanti zeri, quante sono le cifre 3 del moltiplicando. Dunque *una unità di un ordine qualunque* si può considerare come un multiplo di 3 coll' aggiunta di una unità semplice. Da ciò si conchiude come più sopra (n.° 203) che un numero è divisibile per 3 quando la somma delle sue cifre è divisibile per 3.

ARTICOLO II.

Proprietà de' divisori comuni a più numeri.

206. Due o più numeri possono avere più di un divisore comune. Così. 48 e 60 hanno per divisori comuni 1, 2. 4, 6, 12.

207. Si dice *massimo comune divisore* di due o più numeri il più grande fra tutti i divisori comuni a questi numeri.

208. *Il massimo comune divisore di due numeri, di cui l'uno è un multiplo dell' altro, è il numero più piccolo.*

Siano i due numeri 48 e 16. Poichè 16 divide esattamente 48, ne segue che 16 è il massimo comune de' due numeri proposti; non potendo esistere un numero più grande di 16, che divida lo stesso 16.

209 *Ogni divisore comune a due numeri divide anco il resto della divisione dell' uno per l' altro.*

Siano i due numeri 312 e 132: dividendo il primo pel secondo il quoziente sarà 2. ed il resto 48. Or dico che 3 divisore comune de' numeri proposti deve dividere ancora il resto 48 della loro divisione. Infatti, essendo il dividendo eguale al prodotto del divisore pel quoziente, più il resto, s' avrà

$$312 = 132 \times 2 + 48.$$

Dividendo per 3 queste due quantità eguali, i quozienti saranno eguali. Ma 3 divide per ipotesi 312 e 132, perciò divide ancora 132×2, che è multiplo di 132; e quindi deve dividere ancora 48, altrimenti il numero intero, che si ha dividendo 312 per 3, sarebbe uguale al numero intero, che risulta dividendo 132×2, per 3, più il numero fratto, che darebbe 48 diviso per 3; il che non può sussistere.

210. *Il massimo comune divisore di due numeri è lo stesso che quello del più piccolo di questi numeri, e del resto della loro divisione.*

Siano i due numeri 312 e 132. Il massimo comune divisore di questi numeri deve dividere 48, che è il resto della loro divisione. Quindi sopponendo che 12 sia il massimo comune divisore accennato, sarà 12 un divisore comune di 132 e 48. Or dico che sarà il massimo comune divisore di questi numeri, perchè se ve ne fosse un altro più grande, per esempio, 16, questo dividerebbe 132×2 e 48, e per conseguenza dovrebbe anche dividere 312, che è la somma di questi numeri, ed allora non sarebbe più 12 il massimo comune divisore di 312 e 132, contro la supposizione.

211. *Ogni divisore comune a due numeri divide il massimo comune divisore di questi numeri.*

Siano 312 e 132 i due numeri dati. Ogni divisore comune a 312 e 132 divide il resto 48 della loro divisione; dividendo 132 e 48, divide il resto 36; dividendo 48 e 36, divide il resto 12. Ma

12 è il massimo comune divisore di 36 e 12, e perciò di 312 e 132, dunque la proposizione euuuciata rimane dimostrata.

212. *Il resto che si ha dividendo per un numero il prodotto di due fattori è uguale a quello che si trova dividendo per lo stesso numero il prodotto de' resti, che risultano dalla divisione di ciascun fattore pel numero accennato.*

Siano 39 e 23 i due fattori dati: dividendo ciascuno di questi fattori per un numero 9, per esempio, s' avrà $39 = 9 \times 4 + 3$, e $23 = 9 \times 2 + 5$ Quindi il prodotto de' due fattori 39 e 23 è eguale al prodotto di quattro fattori, cioè a quello di 36 per 18, di 3 per 18, di 36 per 5, di 3 per 5. Ma ciascuno de' primi tre è un multiplo di 9, e perciò divisibile per 9, dunque il resto del prodotto 39×23 diviso per 9 è uguale al resto che dà il prodotto 3×5 diviso per lo stesso 9.

ARTICOLO III.

Numeri primi.

213. Si dice che un numero è *primo*, quando è divisibile solamente per se stesso e l'unità. Tali sono i numeri 2, 3, 5. 7, 11, ecc..

214, Due numeri si dicono *primi fra loro*, quaudo non hanno altro divisore comune che l' unità. Tali sono i numeri 21 e 40.

215. Dalle cose precedenti apparisce che un numero primo, eccetto il 2, non può esser mai un numero pari; per conseguenza tutt' i numeri primi si troveranno compresi nella serie de' nnmeri impari 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, ... Quindi se da questa serie si tolgono gli impari multipli, come 9, 15, 21, ecc.; i rimanenti saranno numeri primi. Or si osservi che cominciando dopo il 3, e prendendo i numeri della serie di tre in tre, cioè 9, 15, 21, 27, ecc., tutti questi numeri saranno soli divisibili per 3; e però devono essere esclusi.

Infatti, ciascun numero della serie differisce dal precedente di 2 unità; per conseguenza i numeri presi di tre in tre differiranno tra loro di 6, ed il primo essendo 9, che è divisibile per 3, saranno tutti divisibili per 3.

Cominciando dopo il 5, e prendendo i numeri della serie di cinque in cinque, cioè 15, 25, 35. ecc., tutti questi numeri saranno divisibili per 5, e però devono escludersi. Perocchè, i numeri presi di cinque in cinque differiscono tra loro di 10 unità, ed il primo essendo 15, che è divisibile per 5, saranno tutti ancora divisibili per 5. Proseguendo nello stesso modo, cioè prendendo i numeri di sette in sette, a partire dopo il 7, di undici in undici, a partire dopo 11, ecc. si potrà formare una tavola di numeri primi sino a quel limite che si vorrà. (d).

(d) S' immagini una tavoletta, che abbia tanti fori, quanti sono i numeri impari della serie, che si sarà stabilita; e che sopra questi fori siano situa-

216. *Ogni numero che divide un prodotto di due fattori, e che è primo con uno di questi fattori, divide necessariamente l' altro fattore.*

Sia il prodotto 27×48 divisibile per 12, che è primo con 27: dico che 12 deve dividere 48.

Infatti, 12 divide evidentemente 12×48; ma per ipotesi divide pure 27×48, dunque è comune divisore di questi due prodotti; e però deve dividere il loro massimo comune divisore (n.° 211). Or i divisori comuni ai due prodotti accennati sono 48 ed 1, perchè 12 e 27 sono primi fra loro, dunque 48 è il massimo comune divisore degli stessi prodotti, onde 12 deve dividere 48; il che si doveva dimostrare.

217. *Ogni numero primo che divide un prodotto di più fattori divide necessariamente uno di essi.*

Sia il prodotto $9 \times 8 \times 11$ divisibile per 3. Se 3 dividesse 11, il teorema sarebbe dimostrato, ma non lo divide, dunque è primo con 11, e però pel teorema precedente deve dividere 9×8, perchè il prodotto dato equivale a 9×8 moltiplicato per 11. Similmente, essendo 3 primo con 8 deve dividere 9; e perciò il teorema rimane dimostrato

È poi manifesto che se alcun fattore non fosse divisibile per 3, il prodotto dato non sarebbe divisibile per 3.

218. *Un numero primo che divide una potenza di un numero, divide ancora questo numero.*

Infatti, una potenza di un numero è il prodotto di più fattori eguali a questo numero; e però in virtù del teorema precedente si conchiude che se un numero primo divide una potenza di un numero, deve dividere anche questo numero.

219. *Se un prodotto è divisibile per un numero non primo, tutti i fattori di questo numero dovranno trovarsi fra quelli che costituiscono il prodotto medesimo.*

Sia il prodotto 10×70 divisibile per 28: dico che i fattori di questo numero devono trovarsi in quelli di 10 e di 70. Infatti, dinotando con la lettera Q il quoziente del prodotto dato pel divisore 28, s' avrà

$$10 \times 70 = 28 \times Q.$$

Ma $28 = 2 \times 2 \times 7$, dunque sarà

$$10 \times 70 = 2 \times 2 \times 7 \times Q.$$

Dividendo per 7 queste due quantità eguali, i quozienti devono essere eguali; e però sarà 10×70 diviso per 7 eguale a 2×2

---

ti i detti numeri per ordine. Ciò fatto, si prendano questi numeri di tre in tre, di cinque, ecc., e si facciano cadere i multipli. ché si devono escludere, per i fori corrispondenti, resteranno sulla tavoletta i soli numeri primi. In ciò consiste il famoso *crivello* di Eratostene.

$\times Q$: ma questo numero è intero, dunque anche il primo quoziente dovrà essere un numero intero, vale a dire il fattore 7 dovrà trovarsi tra i fattori di 10 e di 70 (n.° 217). La stessa dimostrazione ha luogo per gli altri fattori di 28; e però il teorema enunciato rimane dimostrato.

220. *Se due numeri sono primi fra loro, le loro potenze saranno anche prime fra loro.*

Siano 7 e 9 due numeri primi fra loro, e si prendano due potenze di questi numeri, per esempio, 7^3 e 9^2: dico che queste potenze sono prime fra loro. Infatti, se non fossero prime fra loro, dovrebbero avere un divisore comune, ed allora i fattori di questo divisore si dovrebbero trovare in quelli di 7^3 e 9^2, vale a dire dovrebbero 7 e 9 ammettere un divisore comune, contro la supposizione; dunque 7^3 e 9^2 sono numeri primi fra loro, siccome doveva dimostrarsi.

221. *Un numero non può essere scomposto che in un solo sistema di fattori primi.*

Sia N un numero, e supponiamo che nel tempo stesso si possa avere $N = 7 \cdot 5 \cdot 3$, e $N = 2 \cdot 3 \cdot 11$.

Poichè 11 divide N, bisogna che divide ancora uno de' fattori 7, 5, e 3 di N: ma questi sono numeri primi, e però non divisibili per 11, dunque dovrebbe essere 11 eguale ad uno de' fattori accennati. La stessa dimostrazione si applica al fattore 2, ed a qualsivoglia altro fattore, dunque il numero N non può essere espresso che da un solo sistema di fattori primi.

222. È manifesto che la dimostrazione precedente ha luogo anche quando i fattori primi del numero proposto non sono tutti disuguali fra loro; di guisa che se in una dell'espressioni del numero N un fattore entra più volte, entrerà lo stesso numero di volte nell'altra.

CAPITOLO XVI.

APPLICAZIONE DELLE PROPRIETA' DE' NUMERI ALLA RISOLUZIONE DI ALCUNI PROBLEMI.

223. Le proprietà de' numeri dimostrate nel capitolo precedente servono alla risoluzione di alcuni importanti problemi, di cui ci occuperémo in questo capitolo.

ARTICOLO I.

Scomposizione di un numero in fattori primi.

224. Per scomporre un numero in fattori primi si dovrà tenere la seguente regola.

Si divida il numero proposto primieramente per 2, tante volte successive, quante si potrà: il numero proposto sarà il prodotto

di una potenza di 2 per un quoziente conosciuto, non divisibile per 2. Si tenterà similmente la divisione di questo quoziente per 3 tante volte, quante si potrà, ed esso sarà il prodotto di una potenza di 3 per un nuovo quoziente conosciuto, non divisibile per 3. Si continuerà nello stesso modo a tentare se la divisione è possibile per tutti i numeri primi consecutivi 5, 7, 11, 13, ecc. *Il numero proposto sarà il prodotto di questi diversi numeri primi, ciascuno elevato ad una potenza indicata dal numero delle divisioni effettuate.*

Sia, per esempio, da scomporsi il numero 360 in *fattori primi*, *o in altri termini sia proposto di trovare tutti i divisori semplici di questo numero.*

Si dispone l'operazione, come si vede qui al margine.

360	1
180	2
90	2
45	2
15	3
5	3
1	5

Il quoziente di 360 diviso per 1 essendo 1, si passa a dividere 360 per 2, e si ha per quoziente 180. Si divide questo quoziente per 2, e si ha il nuovo quoziente 90, che si dividerà pure per 2. Il quoziente 45 non è più divisibile per 2; e però si ha $360 = 2.2.2.45$, ovvero $360 = 2^3 \times 45$. Dividendo 45 pes 3, s'ottiene il quoziente 15, che diviso pure per 3, dà il quoziente 5. Ma que tto è uu numero primo, dunque la scomposizione di 360 in fattori primi è terminata, e sarà

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5.$$

Quindi il numero proposto è uguale al prodotto de' tre fattori primi 2, 3, 5, de' quali il primo trovasi elevato alla terza potenza, il secondo alla seconda, e l'ultimo alla prima.

225. Pare che avrebbe dovuto tentarsi la divisione di 360 per numeri più grandi di 5: ma ciò è inutile, perchè è stato dimostrato (n.° 221) che un numero non può essere espresso che da un solo sistema di fattori primi; di guisa che il numero 360 non può ammettere fattori primi diversi da 2, 3, e 5; e non si può dare inoltre a questi fattori che un solo sistema di esponenti (n.° 222).

226. Talvolta accade che non si trovi alcun divisore esatto sia del numero proposto, sia di uno de' quozienti, a cui si perviene nel progresso della operazione. In tal caso, il numero proposto, o il quoziente; di cui è parola, sono numeri primi. Per evitare le divisioni inutili, bisogna osservare che *se un numero non è divisibile per la sua radice quadrata approssimata, esso è numero primo.* Così 73 è un numero primo, perchè la radice quadrata di 73 è compresa tra 8 e 9, ed alcun numero sino ad 8 inclusivamente non divide 73.

La ragione n'è chiara, perchè 73 è il prodotto della sua radice quadrata moltiplicata per se stessa. E poichè non si può far crescere l'uno de' fattori, senza che l'altro diminuisca, ne segue che non può esistere un divisore di 73 maggiore di 8, appunto perchè non ne esiste alcuno minore di 8.

Quando poi non si volesse ricorrere alla estrazione della radice quadrata, si dovrà tener presente una tavola di numeri primi, di cui abbiam parlato (nº 215):

ARTICOLO II.

Ricerca di tutti i divisori di un numero dato.

227. Sia proposto, per esempio, di trovare tutti i divisori del numero 210. Scomposto questo numero ne sui divisori semplici, s'avrà

$$210 = 1.\ 2.\ 3.\ 5.\ 7.$$

Or è chiaro che essendo 210 il prodotto di tutti questi fattori, le combinazioni di questi stessi fattori in tutti i modi possibili, cioè a due a due, a tre a tre, ecc.. dovranno dare tutti i *divisori composti* di 210. Purtuttavolta, a fine di non omettere alcuno di questi fattori, si dispone l'operazione come qui sotto.

210	1
105	2
35	3, 6
7	5,10,15,30
1	7,14,21,35,42,70,105,210.

Trovati i divisori semplici 1, 2, 3, 5, 7,

Si moltiplica ciascuno di questi divisori per tutti quelli, che lo precedono, badando di non scrivere due volte lo stesso divisore.

Così, si è cominciato dal moltiplicare 2 per 1, e siccome il prodotto è 2, e questo divisore già si trovava, si è lasciato tal quale. In seguito, si è moltiplicato 3 per 1, e si è avuto 3 che già vi era: poi 3 per 2, e si è avuto 6, che si è scritto accanto al 3. Passando al divisore 5, si è moltiplicato 5 per 1, e si è avuto 5, per 2, e si è avuto 10, per 3, e s'è avuto 15, per 6, e s'è avuto 30. Tutti questi prodotti si sono scritti accanto al 5 in una medesima linea.

Si è poi presentato il divisore 7, il quale si è moltiplicato per 1, per 2, per 3, per 5, per 6, per 10, per 15, e per 30, e si sono avuti i divisori 14, 21, 35, 42, 70, 105, 210, che si sono scritti accanto al 7 in una medesima linea.

È manifesto che operando nel modo indicato si vengono a combinare i divisori semplici a due a due, a tre a tre, ecc.., e però si hanno tutti i divisori di un numero dato; siccome s'era proposto di trovare.

ARTICOLO III.

Ricerca del massimo comune divisore di due numeri.

228. *Sia proposto di trovare il massimo comune divisore de' numeri* 312 *e* 132.

Si dispone l' operazione come si vede qui sotto

	2	2	1	3
312	132	48	36	12
48	36	12	0	

Si divide 312 per 132, il quoziente 2 si mette sopra al divisore; indi si moltiplica 2 per 132, ed il prodotto si sottrae da 312; il resto 48 si scrive a destra del divisore, affinchè possa occupare il luogo convenevole nella divisione seguente, che consiste nel dividere 132 per 48. Questa seconda divisione deve farsi, perchè si è dimostrato (n.° 210) che il massimo comune divisore di 312 e 132 è lo stesso che il massimo comune divisore di 132 e 48. Si divida dunque 132 per 48, il quoziente 2 si metta al di sopra del divisore 48, ed il resto 36 si scriva a destra dello stesso 48. Per la ragione addotta si dovrà dividere 48 per 36, scrivere il quoziente 1 sopra 36, ed il resto 12 a destra dello stesso 36. Dividendo finalmente 36 per 12, la divisione si fa esattamente; dal che si conchiude (n.° 208) che 12 è il massimo comune divisore di 12 e 36, ossia di 36 e 48, di 48 e 132, ed in fine di 132 e 312 (n.° 210).

Dunque per trovare il massimo comune divisore di due numeri si dovrà operare colla seguente regola.

Si divida il numero maggiore pel numero minore: se la divisione succede esattamente, il minore de' due numeri è il massimo comune divisore richiesto, ma se ciò non accade, si dividerà il numero minore pel resto; e se la seconda divisione si fa esattamente, questo primo resto sarà il massimo comune divisore: nel caso contrario si dividerà il resto della prima divisione per quello della seconda, questo pel resto della terza, e così in progresso finchè si arrivi ad un quoziente esatto: l'ultimo divisore sarà il massimo comune divisore de' due numeri proposti.

229. Poichè i resti decrescono continuamente, è chiaro che si dovrà sempre trovare un divisore esatto, anche che questo fosse l' unità. Quando accaderà che l' ultimo divisore è l' unità, allora i due numeri proposti sono primi fra loro. Così, se si trovi il massimo comune divisore di 50 e 21, l' ultimo divisore sarà l'unità; e però si conchiude che questi numeri sono primi fra loro.

230. Se nel corso della operazione si trova per resto un numero primo, che non divide esattamente il resto precedente, si conchiuderà che i numeri proposti sono primi fra loro. Infatti, il numero primo accennato non può essere il massimo comune divisore richiesto, perchè non divide esattamente il resto precedente. Da un' altra parte i due resti, di cui è parola, essendo primi fra loro avranno l' unità per massimo comune divisore; per conseguenza anche i numeri proposti dovranno avere l' unità per massimo comune divisore; e però saranno primi fra loro.

231. Dalle cose dimostrate (n.° 221 e 222) apparisce che due o più numeri non possono avere per divisori comuni che i loro fattori

primi comuni, e le combinazioni di questi a due a due, a tre a tre, ecc.. Quindi si conchiude che

Il massimo comune divisore di due o più numeri è il prodotto de' fattori primi comuni a questi numeri, elevati rispettivamente alla più piccola delle potenze, in cui entrano questi fattori ne' numeri proposti.

Scomponendo, per esempio, in fattori primi i numeri 312 e 132, si trova.

$$312 = 2^3 \times 3 \times 13 \text{, e } 132 = 2^2 \times 3 \times 11.$$

Dunque, il massimo comune divisore di questi numeri dev' essere $2^2 \times 3$, ovvero 12; ed in fatti, i fattori comuni a 312 e 132 sono 2, 3, 4, 6, 8, 12.

232. Da ciò si deduce che se i numeri 312 e 132 si dividono pel loro massimo comune divisore 12, i quozienti 26 e 11 devono essere numeri primi fra loro. Dunque.

Se si dividono due numeri pe' loro massimo comune divisore, i quozienti, che si ottengono, sono numeri primi fra loro.

ARTICOLO IV.

Ricerca del massimo comune divisore di più di due numeri.

233. *Sia proposto di trovare il massimo comune divisore de' numeri 60, 48, 54.*

Il massimo comune divisore richiesto deve dividere 60 e 48; per conseguenza (n.° 211) dovrà dividere 12, che è il massimo comune divisore di questi numeri. Ma il massimo comune divisore richiesto deve dividere ancora 54, dunque dovrà dividere 12 e 54; e però non potrà sorpassare 6 che è il massimo comune divisore di questi numeri, dunque 6 è il massimo comune divisore richiesto. Infatti 6 divide 54, divide 12, dunque deve dividere 48 e 60, che sono multipli di 12: per conseguenza 6 è divisore comune de' tre numeri dati. E poichè il massimo comune divisore di questi numeri non può sorpassare 6, ne segue che questo numero è il massimo comune divisore richiesto.

La dimostrazione precedente potendosi applicare a quanti numeri si vogliono, si conchiude che

Per trovare il massimo comune divisore di più numeri, si cercherà primieramente il massimo comune divisore di due di questi numeri, poi si cercherà il massimo comune divisore tra il massimo comune divisore trovato ed uno degli altri numeri dati; e così in progresso sino all' ultimo numero dato, l' ultimo massimo comune divisore sarà quello che si richiede.

ARTICOLO V.

Ricerca del minimo comune dividendo di più numeri.

234. Il minimo comune dividendo di più numeri dati è il più piccolo numero, che sia divisibile nel tempo stesso per i numeri accennati. La ricerca di questo numero poggia sul teorema dimostrato (n.° 219), da cui si deduce che un numero può essere divisibile per un altro nel solo caso che contenga tutti i fattori primi di quest' altro, e che ciascuno di questi fattori sia contenuto nel primo numero almeno tante volte, quaute è contenuto nel secondo, quindi segue che

Per determinare il minimo comune dividendo di più numeri dati, bisogna fare il prodotto di tutti i fattori primi differenti di questi numeri, dando a ciascun fattore il più grande esponente, che ha ne' numeri accennati.

Sia proposto, per esempio, di trovare il minimo comune dividendo de' numeri 2, 3, 5, 6, 8, 10, 12, 15. 24.

Riflettendo che i numeri 2, 3, 6, 8, e 12 dividono 24, e che 5 divide 10, si conchiude che il minimo comune dividendo richiesto è quello de' numeri 10, 15, e 24. Or scomponendo questi numeri in fattori primi si trova

$$10 = 2 \times 5,\ 15 = 3 \times 5,\ 24 = 2^3 \times 3,$$

dunque il minimo comune dividendo de' numeri proposti è $2^3 \times 3 \times 5$, ossia 120.

ARTICOLO VI.

Prove della moltiplicazione e della divisione, dedotte dalle proprietà del numero 9.

235. Le proprietà del numero 9 dimostrate (n° 203) danno il modo di fare comodamente e velocemente le prove della moltiplicazione, e della divisione.

236. La prova della moltiplicazione si fa colla regola seguente.

Si dividono per 9 i due fattori ed il prodotto ; il che si riduce a togliere 9 quante volte si può dalla somma delle cifre di ciascuno de' tre numeri accennati (n.° 204). *S' avranno tre resti : si moltiplichino i due primi, e dalla somma delle cifre del prodotto, che risulta. si tolga* 9 *quante volte si può. Se l' operazione è stata ben fatta, il resto che si ottiene dev' essere uguale al terzo resto.*

Siano, per esempio, 368 e 97 due fattori, e 35696 il loro prodotto. Volendo verificare questo prodotto, si tolga 9 quante volte si può dalla somma delle cifre di ciascuno de' tre numeri dati. La prima operazione dà il resto 8, la seconda dà 7, che si mette sotto a 8, la terza dà 2, che

8	2
7	2

si scrive a destra di 8. Si moltiplichino i due primi resti, e dalla somma delle cifre del prodotto 56 si tolga 9 quante volte si può, s'avrà il resto 2, il quale essendo eguale al terzo resto, si conchiude che l'operazione è stata ben fatta (n.° 212).

237. È facile il vedere che la *prova del* 9 non è rigorosa, potendo riuscire fallace in diversi casi.

Ci limiteremo a citare i due seguenti: 1.° allorchè nel prodotto si scrive zero in luogo di 9, e viceversa; 2.° se gli errori commessi in una parte del prodotto si trovano compensati da altri commessi in senso opposto nell'altra. In ciascuno di questi casi si ha lo stesso resto togliendo il 9 quante volte si può dalla somma delle cifre. Nondimeno, se la prova del 9 è stata ben fatta, e non riesce, si può esser sicuri che il prodotto dato è erroneo.

238. La prova della divisione si fa colla regola seguente.

Si tolga il resto dal dividendo; il numero risultante essendo il prodotto del divisore pel quoziente si potrà verificare colla regola precedente.

239. Partendo dalle proprietà del numero 9 si potrebbero dedurre nuove prove dell'addizione, della sottrazione, dell'elevazione a potenza, e dell'estrazione delle radici, ma val meglio fare in questi casi le prove, che abbiamo altrove indicate.

LIBRO SECONDO

NUMERI FRATTI.

CAPITOLO PRIMO

NATURA DELLE FRAZIONI IN GENERALE, E LORO VALORE.

240. Nel libro precedente (n.° 83) vedemmo che l' idea del *numero fratto*, *o frazione*, *o rotto*, si presenta, quando la divisione lascia un resto. In tal caso, dicemmo che il quoziente si compone di due parti, l' una è formata di unità intere, mentre l' altra si forma concependo l' unità del dividendo divisa in tante parti eguali, quante sono le unità del divisore, e prendendo tante di queste parti, quante unità sono nel resto, a fine di rendere completo il quoziente richiesto.

Così, se si divida 26 per 7, il quoziente sarà $3+\frac{5}{7}$, vale a dire sarà composto di 3 unità intere, e del quoziente che risulterebbe dividendo 5 per 7. Or il quoziente di 1 diviso per 7 equivale evidentemente alla settima parte di una unità, ossia ad una parte dell' unità divisa in sette parti eguali; per conseguenza il quoziente di 5 diviso per 7 dovrà equivalere a cinque volte la settima parte dell' unità, ovvero a cinque parti dell' unità divisa in sette parti eguali. Da ciò segue che il quoziente di 26 diviso per 7 si compone di 3 unità intere e di cinque settimi di una unità. Sotto questo punto di vista l' espressione $\frac{5}{7}$ non offre più alcuna difficoltà, e si chiama *fratto*, *frazione*, *o rotto*.

241. Indipendentemente dal resto della divisione, l' idea di frazione si presenta naturalmente dividendo effettivamente una unità concreta in parti eguali. Così, dividendo una canna in 7 parti eguali, e prendendo 5 di queste parti, si ha la frazione *cinque settimi di canna*. Ma qualunque origine si voglia dare alla frazione, è manifesto che la sua natura consiste sempre in ciò che segue.

Una frazione è un numero che esprime una parte o una collezione di più parti dell' unità divisa in parti eguali.

242. Da questa difiuizione apparisce che per esprimere una frazione si richiedono due numeri, l' uno per indicare il *numero* delle

parti, che si prendono dell' unità, l' altro per nominare la *specie* di queste parti. Quindi il primo è stato chiamato *numeratore*, ed il secondo *denominatore*. Si è dato poi ad ambedue congiuntemente il nome di *termini della frazione*, perchè servono ad esprimere la frazione medesima.

243. Poichè il valore di una frazioue è eguale al quoziente del numeratore diviso pel denominatore, ue segue che il denominatore si scrive sotto al numeratore con una linea in mezzo. Quindi, le frazioni *un mezzo*, *due terzi*, *tre quarti*, *quattro quinti*, ec.., si serivono $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, ecc...

244. La frazione $\frac{7}{10}$ s' enuncia con dire: *sette decimi:* ma quando il denominatore supera 10. allora s' enuncia aggiungendovi la terminazione *esimi*. Così $\frac{7}{11}$, $\frac{5}{12}$, , ecc s'enunciauo dicendo: *sette undicesimi*. *cinque dodicesimi*, ecc.

245. Dall' essere il valore di una frazione equivalente al quoziente del numeratore diviso pel denominatore, si deduce ancora che si considerano come frazioni quelle, in cui il numeratore è uguale, o maggiore del denominatore. Così, l' espressioni $\frac{8}{8}$, e $\frac{29}{27}$ si considerano come frazioni, e s' enunciano come queste, dicendosi: *otto ottavi*. e *ventinove ventisettesimi*.

246. A fine di distinguere le frazioni propriamente dette, che sono sempre minori dell' unità, dalle frazioni accennate, si dà alle prime il nome di *frazioni vere*, o *proprie*, ed alle seconde quello di *frazioni spurie*, *improprie*, o *apparenti*.

Quindi si dice che una *frazione vera* è quella, il cui numeratore è minore del denominatore; e che una *frazione spuria* è quella, il cui numeratore è uguale o maggiore del' denominatore. Se non che sarebbe meglio chiamare semplicemente *frazioni* le frazioni vere, ed *espressioni frazionarie*, o *numeri frazionarj* le frazioni spurie, come è stato praticato da alcuni scrittori d' Aritmetica.

247. ***Se, senza alterare il denominatore di una frazione, si moltiplica o si divida il suo numeratore per un numero, la frazione sarà moltiplicata o divisa per lo stesso numero.***

La dimostrazione di questo teorema risulta da ciò che abbiam detto (n.° 118), se il valore della frazione si considera come eguale al quoziente del numeratore diviso pel denominatore. Ma volendo stare alla definizione della frazione, che è stata data al principio di questo capitolo, ecco come si dimostra il teorema accennato.

Quando si accresce il numeratore di una frazione, senza alterare il denominatore, deve crescere il valore della frazione medesima, perchè cresce il numero delle parti, che si prendono dell' unità: dunque, se il numeratore si moltiplica per 2, per 3, per 4, ed in generale per un numero qualunque, la frazione sarà moltiplicata per questo stesso numero. Similmente si dimostra che quando si diminuisce il numeratore della frazione, il valore di questa diminuisce; e però quando il numeratore si divide per un numero, la frazione deve rimanere divisa per lo stesso numero.

248. *Se, senza alterare il numeratore di una frazione, si moltiplica o si divida il denominatore per un numero, la frazione si divide nel primo caso, e si moltiplica nel secondo caso per lo stesso numero.*

Infatti, quando s'accresce il denominatore, il valore della frazione diminuisce, perchè divengono più piccole le parti, in cui è stata divisa l' unità; per conseguenza se il denominatore si moltiplica per un numero, la frazione deve rimanere divisa per lo stesso numero. È manifesto che dovrà succedere tutto l'opposto quando il denominatore sarà diviso per un numero.

249. *Una frazione non cambia valore, quando ambidue i termini si moltiplicano o si dividono per uno stesso numero.*

Questo teorema è una conseguenza immediata de' due teoremi precedenti: perocchè, l'effetto che si produce moltiplicando o dividendo il denominatore per un numero distrugge quello che risulta moltiplicando o dividendo il numeratore per lo stesso numero. Quindi la frazione non cambia in quanto al valore, ma solamente in quanto alla forma.

Così, la frazione $\frac{3}{4}$, moltiplicando per 2 i suoi termini, equivale a $\frac{6}{8}$; o pure a $\frac{9}{12}$, moltiplicando per 3 i suoi termini; ovvero a $\frac{15}{20}$, moltiplicando per 5 i suoi termini, ecc...

250. Dalle cose dette più sopra (n.° 245) risulta che quando il numeratore è uguale al denominatore la frazione spuria equivale all' unità. Così $\frac{8}{8}=1$, $\frac{14}{14}=1$, ecc Quando poi il numeratore è maggiore del denominatore, la frazione accennata è maggiore della unità. Così, $\frac{32}{12}=2\frac{8}{12}$, $\frac{17}{4}=4\frac{1}{4}$. ecc. Da ciò si deduce che

Per estrarre l' intero contenuto in una frazione spuria, bisogna dividere il numeratore pel denominatore. Il quoziente sarà l' intero, ed il resto sarà il numeratore della frazione, che deve essere aggiunta all' intero.

251. Viceversa, *per ridurre un intero e un fratto ad un solo fratto, bisogna moltiplicare l' intero pel denominatore, aggiungere al prodotto il numeratore, e dare alla somma il denominatore del fratto proposto.*

Così il numero $2\frac{3}{12}$ si riduce ad un solo fratto moltiplicando 2 per 12, aggiungendo 3 al prodotto 24, e dando alla somma 27 il denominatore 12. La ragione è chiara: in fatti l' intero 2 equivale a $\frac{24}{12}$; è però $\frac{24}{12}$ e $\frac{3}{12}$ devono equivalere alla frazione spuria $\frac{27}{12}$

252. *Una frazione vera cresce o diminuisce, secondo che i suoi termini s' accrescono o si diminuiscono di uno stesso numero.*

Sia la frazione $\frac{5}{12}$: accrescendo i due termini di 6, risulta la frazione $\frac{11}{18}$: dico che la seconda frazione è più grande della prima.

Infatti, essendo $\frac{12}{12}=1$, la differenza tra l'unità e la prima frazione sarà $\frac{7}{12}$. Similmente, essendo $\frac{18}{18}=1$, la differenza fra l'unità e la seconda frazione sarà $\frac{7}{18}$; ma $\frac{7}{18}$ è minore di $\frac{7}{12}$ (n.° 248), dunque la seconda frazione, cioè $\frac{11}{18}$, differisce dall' unità meno di quello che la prima, cioè $\frac{5}{12}$, differisce dalla stessa unità; e per conseguenza dovrà essere $\frac{11}{18}$ maggiore di $\frac{5}{12}$.

Questa dimostrazione è generale, qualunque siasi la frazione proposta. Infatti, il numeratore della prima differenza si ottiene con prendere 12 come sottraendo e 5 come sottrattore: quello della seconda poi si ha con prendere 12+6 come sottraendo e 5+6 come sottrattore; per conseguenza i numeratori delle due differenze saranno sempre eguali (n.° 100): ed il denominatore della seconda sarà maggiore di quello della prima.

La seconda parte del teorema risulta evidentemente dalla prima; e però non ha bisogno di altra dimostrazione.

253. *Una frazione spuria diminuisce o cresce, secondo che i suoi termini si accrescono o si diminuiscono di uno stesso numero.*

Si dimostra questo teorema come il precedente; solamente si dovrà badare a sottrarre l' unità dalla frazione spuria, e non già la frazione dall' unità come si è fatto più sopra.

CAPITOLO II.

RIDUZIONE DELLE FRAZIONI.

254. Si dà il nome di ***riduzione delle frazioni*** a diverse trasformazioni, che si fanno subire alle frazioni, senza alterare il loro valore.

ARTICOLO I.

Riduzione delle frazioni allo stesso denominatore.

255. *Per ridurre due frazioni allo stesso denominatore, bisogna moltiplicare i due termini di ciascuna frazione pel denominatore dell' altra.*

Siano, per esempio, le frazioni $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{7}$ da ridursi allo stesso denominatore. Moltiplicando i termini della prima per 7, e quelli della seconda per 4, risultano le due frazioni $\frac{21}{28}$ e $\frac{20}{28}$ che hanno lo stesso denominatore, e sono equivalenti alle due proposte, perchè non cambia il valore di una frazione, quando i suoi termini si moltiplicano per uno stesso numero.

256. *Per ridurre più di due frazioni allo stesso denominatore bisogna moltiplicare i due termini di ciascuna frazione pel prodotto de' denominatori di tutte le altre.*

Siano, per esempio, le frazioni $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$ da ridursi allo stesso denominatore.

Si moltiplichino i due termini della prima per 35, quelli della seconda per 21, della terza per 15, ne risulteranno le frazioni $\frac{35}{105}$, $\frac{84}{105}$, $\frac{90}{105}$, che saranno equivalenti alle prime, ed avranno lo stesso denominatore.

Infatti devono essere in primo luogo equivalenti alle frazioni proposte, perchè queste non hanno cambiato valore, essendosi moltiplicati i termini di ciascuna per uno stesso numero. Devono

avere in secondo luogo lo stesso denominatore, perchè qualunque siasi l' ordine de' fattori 3, 5, 7, il prodotto rimane sempre lo stesso.

257. Nella pratica basta calcolare una sola volta il denominatore comune. Quindi *per ridurre le frazioni allo stesso denominatore, basta moltiplicare il numeratore di ciascuna frazione per i denominatori delle altre, e mettere per denominatore comune il prodotto di tutti i denominatori.*

258. Quando i denominatori non sono primi fra loro, la riduzione allo stesso denominatore può abbreviarsi.

Se si dovessero, per esempio, ridurre allo stesso denominatore le frazioni $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$, basterebbe moltiplicare per 2 i termini della prima frazione, perchè 4 è divisibile esattamente per 2. Similmente, le frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$ si possono ridurre facilmente allo stesso denominatore, perchè 12 è divisibile esattamente per 3, e per 6. Quindi basta moltiplicare i termini della prima frazione per 4, e quelli della seconda per 2.

In ogni caso, si potrà abbreviare la riduzione delle frazioni allo stesso denominatore *con cercare il minimo comune dividendo di tutti i denominatori delle frazioni proposte, e metterlo per denominatore comune.*

Siano da ridursi allo stesso denominatore le frazioni.

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{6},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{12}.$$

Si dispone l' operazione come si vede qui sotto

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{6},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{12}$$
$$12,\ 8,\ 6,\ 4,\ 3,\ 2,$$
$$\frac{12}{24},\ \frac{16}{24},\ \frac{18}{24},\ \frac{4}{24},\ \frac{9}{24},\ \frac{10}{24}.$$

Si troverà il minimo comune dividendo di tutti i denominatori delle frazioni proposte, e s' avrà 24 (n.° 234). Si dividerà 24 per ciascuno de' denominatori accennati, e s' avranno i quozienti 12, 8, 6, 4, 3, 2. Finalmente, si moltiplicheranno i due termini di ciascuna frazione pel quoziente corrispondente, risulteranno le frazioni richieste $\frac{12}{24}$, $\frac{16}{24}$, $\frac{18}{24}$, $\frac{4}{24}$, $\frac{9}{24}$, $\frac{10}{24}$.

259. Si potrebbe proporre di ridurre due o più frazioni allo stesso numeratore. Il modo da tenersi in tal caso risulta manifesto delle cose sopraddette: ma ordinariamente occorre di dover ridurre le frazioni allo stesso denominatore. Se si volesse, per esempio, conoscere quale delle due frazioni $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{7}$ è la più grande, basterà ridurle allo stesso denominatore. Infatti s' avranno le frazioni $\frac{21}{28}$, e $\frac{20}{28}$, la prima delle quali essendo equivalente a $\frac{3}{4}$, e la seconda a $\frac{20}{26}$ ne segue che $\frac{3}{4}$ è maggiore di $\frac{5}{7}$.

ARTICOLO II.

Riduzione delle frazioni a minimi termini, ovvero alla loro più semplice espressione.

260. Ridurre una frazione a ***minimi termini***, o alla ***sua più semplice espressione*** significa trovare una frazione equivalente alla proposta, ed i cui termini siano i più piccoli numeri possibili.

261. *Una frazione é* irreducibile, *quando i suoi due termini sono primi fra loro.*

Sia $\frac{5}{7}$ una frazione, i cui terminini sono primi fra loro; e supponiamo che possa esser equivalente ad una frazione, i cui termini siano rispettivamente più piccoli de' termini della prima. Sia $\frac{3}{4}$ questa nuova frazione; risulterà $\frac{5}{7}=\frac{3}{4}$. Moltiplicando queste due quantità eguali per 4, s'avra $\frac{5\times4}{7}=3$, perchè $\frac{5}{7}$ si moltiplica per 4, quando il suo numeratore è moltiplicato per 4 (n.° 247), e $\frac{3}{4}$ moltiplicato per 4 da' evidentemente 3. Dunque, il prodotto 5×4 dovrebbe essere divisibile esattamente per 7; il che non può sussistere. Infatti, 7 non può dividere 5, perchè 5 e 7 sono primi fra loro, per conseguenza (n.° 217) dovrebbe dividere 4, ma 4 per ipotesi dev' esser minore di 7, dunque la frazione $\frac{5}{7}$ non può esser equivalente ad un' altra frazione, i cui termini siano rispettivamente più piccoli: e però è irreducibile.

262. Dalla dimostrazione precedente apparisce che *se il numeratore ed il denominatore di una frazione data sono primi fra loro, i due termini di qualsivoglia altra frazione equivalente alla prima devono essere egualmente moltiplici de' termini di questa.*

263. *Ridurre una frazione alla sua più semplice espressione.*

Non si deve far altro che trovare il massimo comune divisore dei due termini della frazione proposta, e dividere ciascuno di questi termini pel massimo comune divisore trovato. La frazione risultante sarà la frazione richiesta.

Infatti, operando nel modo accennato la frazione proposta non cambia valore, perchè i suoi termini si dividono per uno stesso numero. In secondo luogo. i termini della frazione risultante sono primi fra loro (n.° 232); e però in virtù del teorema precedente questa frazione è irreducibile. Dunque la frazione proposta è ridotta alla sua più semplice espressione.

Sia, per esempio, la frazione $\frac{1728}{2592}$ da ridursi alla sua più semplice espressione. Il massimo comune divisore de' due termini è 864: dividendo ciascuno di questi termini per 864, si hanno i quozienti 2 e 3, e quindi la frazione proposta si riduce alla frazione equivalente $\frac{2}{3}$

264. A fine di ridurre una frazione alla sua più semplice espressione, non è sempre necessario di ricorrere al massimo comune divisore de suoi due termini. Si può evitare molte volte una siffatta

ricerca per mezzo de' caratteri di divisibilità di un numero per altri numeri (n.° 192).

Sia, per esempio, la frazione $\frac{4536}{7848}$ da ridursi alla sua più semplice espressione. Dividendo i due termini per 4, si ha la frazione $\frac{1134}{1962}$; dividendo i due termini di questa per 2. s' ottiene $\frac{567}{981}$; dividendo in fine i due termini di questa per 9, risulterà la frazione $\frac{63}{109}$, la quale è irreducibile, perchè 63 è numero primo e non divide 109.

ARTICOLO III.

Riduzione di un intero ad una frazione equivalente.

265. Due casi possono accadere, o che non sia dato il denominatore della frazione richiesta, o che sia dato. Nel primo caso, la frazione che avrà l'intero da ridursi per numeratore, e l'unità per denominatore, sarà la frazione cercata. Nel secondo caso, si moltiplica l'intero da ridursi pel dato denominatore: la frazione che ha per numeratore il prodotto trovato, e per denominatore il denominatore dato, è la frazione richiesta.

Sia, per esempio, da ridursi l'intero 12 in una frazione equivalente, basta scrivere $\frac{12}{1}$, perchè 12 diviso per uno dà 12 per quoziente. Che se si volesse ridurre 12 in una frazione equivalente che abbia per denominatore 8, allora si scriverà $\frac{96}{8}$. Infatti, il numero 12 moltiplicato per 8 e diviso per 8 deve dare evidentemente una frazione spuria eguale a 12.

ARTICOLO IV.

Riduzione di una frazione ad un' altra, che abbia un dato denominatore.

266. Questa quistione è stata risoluta in un caso particolare nel principio di questo capitolo. Infatti, la riduzione delle frazioni allo stesso denominatore consiste appunto a ridurre una frazione ad un' altra, che abbia un dato denominatore. La soluzione, che abbiam data in questo caso particolare, è stata semplicissima, perchè il denominatore dato doveva essere un multiplo del denominatore della frazione proposta. Resta ora a risolvere la quistione generalmente, qualunque siasi il dato denominatore. Il principio che serve a risolverla è quello stesso, che è stato già adoperato nell'articolo precedente, vale a dire: *un numero non resta alterato se si moltiplica e si divide per uno stesso numero.* Quindi se la frazione proposta si moltiplica pel denominatore dato, ed il prodotto si divide per lo stesso denominatore, s' avrà la frazione richiesta.

Sia, per esempio, da ridursi la frazione $\frac{10}{15}$ ad un' altra, che abbia 9 per denominatore. Moltiplicando $\frac{10}{15}$ per 9, il prodotto sarà $\frac{90}{15}$, perchè quando il numeratore di una frazione si moltiplica per

un numero, la frazione resta moltiplicata per lo stesso numero (n.° 247). Ma la frazione spuria $\frac{90}{15}$ equivale esattamente a 6 unità, dunque $\frac{10}{15}=\frac{6}{9}$.

Sia proposto ancora di ridurre la frazione $\frac{5}{6}$ in un'altra, che abbia 9 per denominatore. Moltiplicando $\frac{5}{6}$ per 9, si ha la frazione spuria $\frac{45}{6}$, la quale non equivale ad un numero esatto di unità intere, perchè 45 diviso per 6 ha per quoziente un numero compreso fra 7 e 8. In tal caso, la frazione richiesta è $\frac{7}{9}$, o pure $\frac{8}{9}$; e ciascuna di queste differisce dalla proposta di una quantità minore di $\frac{1}{9}$, la prima in difetto, la seconda in eccesso. Infatti, la frazione $\frac{5}{6}$ si trova compresa fra $\frac{7}{9}$ e $\frac{8}{9}$: ciò risulta manifesto dal calcolo precedente; ma si vede più facilmente riducendo le tre frazioni $\frac{7}{9}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{8}{9}$, allo stesso dedominatore, perchè allora si avranno le tre frazioni equivalenti $\frac{14}{18}$, $\frac{15}{18}$, $\frac{16}{18}$.

Si può dunque conchiudere che

Per ridurre una frazione ad un' altra, che abbia un dato denominatore, bisogna moltiplicare la frazione proposta pel denominatore dato, ed estrarre il numero intero contenuto nel prodotto. Questo numero sarà il numeratore della frazione richiesta, la quale potrà essere o equivalente alla frazione proposta, o differente da questa per una quantità minore di una unità divisa pel denominatore dato,

267. Resta ora a trovare le condizioni, che debbono avverarsi, affinchè una frazione si possa ridurre esattamente ad un'altra, che abbia un dato denominatore. Ma ciò apparisce subito dalle cose sopraddette e dal teorema dimostrato (n.° 219), onde risulta che

Una frazione si può ridurre esattamente ad un' altra, che abbia un dato denominatore, quando il suo numeratore contiene tutti i fattori primi del suo denominatore, che non si trovano nel denominatore dato.

Così, abbiam veduto più sopra che la frazione $\frac{10}{15}$ equivale esattamente alla frazione $\frac{6}{9}$, perchè essendo $15=3\times5$, il numeratore 10 contiene il fattore 5, che non si trova nel denominatore dato, ossia nel 9. Quindi il prodotto 10×9 è divisibile esattamente per 15, perchè contiene tutti i fattori di questo numero (n.° 219). Per l'opposto, la frazione $\frac{5}{6}$ non si può ridurre esattamente ad una frazione, che abbia per denominatore 9, perchè il suo numeratore 5 non contiene il fattore 2 del suo denominatere 6, e lo stesso 2 non si trova nel denominatore dato 9; e però il prodotto 5×9 non può esser divisibile esattamente per 6.

CAPITOLO III.

CALCOLO DELLE FRAZIONI.

268. I principj contenuti nei due capitoli precedenti costituiscono la base, su cui poggia il calcolo delle frazioni, che passiamo ad esporre negli articoli seguenti.

ARTICOLO I.

Addizione delle frazioni.

269. *Se le frazioni hanno lo stesso denominatore, basta addizionare i numeratori, e dare alla somma il denominatore comune.*
Per esempio,

$$\frac{5}{7}+\frac{6}{7}+\frac{4}{7}=\frac{5+6+4}{7}=\frac{15}{7}=2\frac{1}{7}.$$

Infatti, il denominatore indica in quante parti eguali è divisa l' unità; per conseguenza quando i denominatori sono eguali, l'unità si trova divisa in ciascuna frazione in uno stesso numero di parti eguali; e però basta addizionare i numeratori, i quali rappresentano il numero delle parti eguali contenute in ciascuna frazione. La somma sarà allora composta di parti eguali della specie di quelle, che l' hanno data, per cui bisogna scrivere il denominatore comune sotto la somma de' numeratori.

270. *Quando le frazioni proposte hanno denominatori differenti, allora bisogna ridurle prima allo stesso denominatore, ed operare come sopra*

Perocchè, le frazioni. che hanno denominatori differenti, esprimono collezioni di parti disuguali dell' unità; e però non sono *omogenee*, ossia dello stesso genere. Or nell' addizione si combinano le quantità omogenee, perciò bisogna ridurre le frazioni, che devono sommarsi, allo stesso denominatore. Con questa riduzione poi s' avranno frazioni equivalenti alle proposte (n.° 256), onde la somma rimane la stessa.

271. Quando le frazioni da addizionarsi sono unite a numeri interi, si comincia l' operazione con fare la somma delle frazioni: da questa si estraggono gl' interi, che potrà contenere, e questi s' aggiungono alla somma degl' interi, che accompagnano le frasioni proposte. Con questa regola si trova che

$$8\tfrac{3}{4}+7\tfrac{2}{5}=16\tfrac{3}{20}.$$

ARTICOLO II.

Sottrazione delle frazioni,

272. *Se le frazioni hanno lo stesso denominatore, basta prendere la differenza de' numeratori, e dare a questa differenza per denominatore il comune denominatore.*

Così, $\frac{9}{12}-\frac{4}{12}=\frac{5}{12}$.

La dimostrazione di questa regola apparisce da ciò che abbiam detto intorno alla somma delle frazioni.

273. *Quando le frazioni hanno denominatori differenti, si ridurranno allo stesso denominatore, e si opererà come nel caso precedente.*

Così $\frac{3}{4}-\frac{2}{5}=\frac{15}{20}-\frac{8}{20}=\frac{7}{20}$

274. *Quando si devono sottrarre interi e fratti da interi e fratti, e la frazione, che accompagna il sottraendo, sorpassa quella, che è unita al sottrattore, allora si prende prima la differenza delle due frazioni, poi quella de' due numeri interi, ed infine si fa la fomma delle due defferenze.*

Con questa regola si trova che

$$47\tfrac{4}{5}-36\tfrac{2}{7}=11\tfrac{18}{35}.$$

275. Ma se la frazione che accompagna il sottraendo è minore di quella che è unita al sottrattore, allora si rende possibile la sottrazione delle due frazioni aggiungendo alla prima frazione una unità dell' intero, che trovasi nel sottraendo. Sia, per esempio, da sottrarsi 21 $\frac{3}{4}$ da 56 $\frac{2}{9}$ Riducendo allo stesso denominatore le frazioni date, si hanno le frazioni equivalenti $\frac{8}{36}$, e $\frac{27}{36}$. Per rendere possibile la sottrazione di queste due frazioni, s' impronta una unità sul nunero intero 56 che trovasi nel sottraendo. Ma $1+\frac{8}{36}=\frac{44}{36}$ (n.° 251), dunque la differenza delle frazioni proposte è $\frac{17}{36}$, e quella degl' interi sarà 34: di guisa che la differenza de' numeri proposti sarà 34 $\frac{17}{36}$.

276. Ciò che abbiam detto si applica ancora al caso, in cui il sottraendo è numero intero, ed il sottrattore un intero accompagnato da una frazione. Così, se da 8 si dovesse sottrarre 5 $\frac{3}{4}$, si vede che questa sottrazione equivale a sottrarre $5\frac{3}{4}$ da $7\frac{4}{4}$; e però la differenza cercata è 2 $\frac{1}{4}$.

ARTICOLO III.

Moltiplicazione delle frazioni.

277. *Per moltiplicare una frazione per un numero intero, basta moltiplicare il numeratore per questo numero, lasciando intatto il denominatore.*

Così, $\frac{5}{7}\times 8=\frac{40}{7}=5\ \frac{5}{7}$.

La dimostrazione di questa regola risulta dalle cose dette altrove (n.° 247).

278. Se il denominatore è divisibile esattamente pel meltiplicatore, allora si dividerà il denominatore per questo moltiplicatore. Così $\frac{9}{12}\times 4=\frac{9}{3}$.

Questa maniera di operare dà un risultato più semplice di quello che s' otterrebbe con la regola precedente, ma questa è generale, mentre l' altra non può sempre applicarsi. In quanto alla dimostrazione di questa seconda regola, essa risulta da ciò che è stato detto (n.° 248).

279. *Per moltiplicare una frazione per un' altra, bisogna moltiplicare i numeratori fra loro, ed i denominatori pure fra loro.*

Così, $\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{28}$.

La dimostrazione di questa regola si può fare in due modi diversi, e giova conoscerli ambidue.

280. *Prima dimostrazione.* Moltiplicando $\frac{3}{4}$ per 5, il prodotto è $\frac{15}{4}$. Or questo prodotto è 7 volte più grande del prodotto richiesto, perchè in vece di moltiplicare $\frac{3}{4}$ per $\frac{5}{7}$, si è moltiplicato $\frac{3}{4}$ per 5, cioè per un numero 7 volte più grande di $\frac{5}{7}$. Quindi il vero prodotto dev' essere eguale a $\frac{15}{4}$ diviso per 7. Ma per dividere una frazione per un numero intero, basta moltiplicare il denominatore per questo numero (n.° 248), dunque il prodotto richiesto è $\frac{15}{28}$

281, *Seconda dimostrazione.* Dalla definizione della moltiplicazione, che abbiam dato (n.° 112) si deduce che il prodotto si forma con fare sul moltiplicando precisamente la stessa operazione che si fa sull' unità per formare il moltiplicatore. Or il moltiplicatore $\frac{5}{7}$ si forma dividendo l' unità in sette parti eguali, e prendendo cinque di queste parti, dunque il prodotto dovrà formarsi dividendo il moltiplicando $\frac{3}{4}$ in sette parti eguali, è prendendo cinque di queste parti; il che equivale a dividere $\frac{3}{4}$ per 7, ed a moltiplicare per 5 il quoziente, che ne risulta. Ma $\frac{3}{4}$ diviso per 7 dà $\frac{3}{28}$, e questa frazione moltiplicata per 5 dà $\frac{15}{28}$, dunque $\frac{15}{28}$ è il prodotto richiesto.

282. *Per moltiplicare un numero intero per una frazione, bisogna moltiplicare per questo numero il numeratore della frazione, lasciando intatto il denominatore.*

Con questa regola si trova che $12 \times \frac{3}{4} = \frac{36}{4} = 9$.

La dimostrazione è quella fatta nel paragrafo precedente.

283. Quando si avesse una espressione come la seguente: $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} \times \frac{7}{8}$, questa dovrà interpretarsi come abbiam detto per i numeri interi (n.° 104), vale a dire significa che $\frac{3}{4}$ si deve moltiplicare per $\frac{2}{5}$, ed il prodotto per $\frac{7}{8}$. È poi manifesto che si può invertere l' ordine de' fattori in tutt' i modi possibili, perchè il prodotto delle tre frazioni proposte s' ottiene con dividere il prodotto de' numeratori per quello de' denumeratori.

248. Se il moltiplicando ed il moltiplicatore fossero numeri interi uniti a frazioni, si ridurrà questo caso alla moltiplicazione di due frazioni con ridurre intero e fratto ad un solo fratto.

Sia, per esempio, da moltiplicarsi $7\frac{2}{3}$ per $8\frac{4}{5}$. Riducendo $7\frac{2}{3}$ a frazione, s' avrà (n.° 251) $\frac{23}{3}$: similmente, $8\frac{4}{5}$ si riduce alla frazione equivalente $\frac{44}{5}$, dunque il prodotto richiesto equivale a quello di $\frac{23}{3} \times \frac{44}{5}$.

Si potrebbe fare ancora la moltiplicazione per parti, vale a dire moltiplicare 7 per 8, poi $\frac{2}{3}$ per 8, 7 per $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$ per $\frac{4}{5}$, e sommare i quattro prodotti; ma questa maniera di operare non è così spedita come la precedente.

285. Quando uno de' fattori fosse un numero intero, e l'altro un intero e fratto, si potrebbe ridurre l'intero e fratto ad un fratto solo, e ridurre questo caso a quello della moltiplicazione di un intero per una frazione, o di una frazione per un intero. Ma s' abbrevia il calcolo facendo la moltiplicazione per parti.

Sia, per esempio, da moltiplicarsi 12 $\frac{2}{3}$ per 8. Moltiplicando $\frac{2}{3}$ per 8, si ha $\frac{16}{3}$, ovvero 5 $\frac{1}{3}$: moltiplicando poi 12 per 8, si trova 96, dunque il prodotto richiesto è 101 $\frac{1}{3}$.

ARTICOLO IV.

Divisione delle frazioni.

286. *Per dividere una frazione per un numero intero, bisogna moltiplicare per questo numero il denominatore della frazione, lasciando intatto il numeratore.*

Così, $\frac{5}{7} : 9 = \frac{5}{63}$.

La dimostrazione di questa regola risulta da ciò che è stato detto (n.° 248).

287. Se il numeratore della frazione proposta è divisibile esattamente per l' intero dato, allora si ottiene un quoziente più semplice con dividere il numeratore per l' intero. Così, $\frac{8}{9} : 4 = \frac{2}{9}$.

Ciò apparisce dalle cose dette (n.° 247).

288. *Per dividere una frazione per un' altra, bisogna moltiplicare la frazione dividendo per la frazione divisore rovesciata.*

Così, $\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8} = 1\ \frac{7}{8}$.

La dimostrazione di questa regola si può fare in due modi diversi, ed è utile conoscerli ambidue.

289. *Prima dimostrazione.* Dividendo $\frac{3}{4}$ per 2 il quoziente è $\frac{3}{8}$, ma 2 è cinque volte più grande di $\frac{2}{5}$, dunque $\frac{3}{8}$ è cinque volte più piccolo del quoziente richiesto (n.° 118). Da ciò segue che per avere questo quoziente, bisogna moltiplicare $\frac{3}{8}$ per 5; il che dà $\frac{15}{8}$; e però questa frazione è il quoziente cercato.

290. *Seconda dimostrazione.* Vedemmo (n.° 122) che il dividendo si forma per mezzo del quoziente come il divisore per mezzo dell' unità. Or il divisore $\frac{2}{5}$ si forma dividendo l' unità in cinque parti eguali, e prendendo due di queste parti, dunque il dividendo $\frac{3}{4}$ si dovrà formare con dividere il quoziente in cinque parti eguali, e con prendere due di queste parti. Da ciò si conchiude che se si divide $\frac{3}{4}$ per 2, il quoziente $\frac{3}{8}$, sarà la quinta parte del quoziente richiesto, e per conseguenza questo sarà eguale a $\frac{3}{8}$ moltiplicato per 5, ossia a $\frac{15}{8}$; il che dimostra la regola più sopra enunciata.

291. Dalla regola precedente apparisce che se le due frazioni proposte hanno lo stesso denominatore, basterà dividere i numeratori. Così, $\frac{5}{8} : \frac{7}{8} = \frac{5}{7}$.

Infatti, $\frac{5}{8} : \frac{7}{8} = \frac{5}{8} \times \frac{8}{7} = \frac{5}{7}$, perchè togliendo il fattore comune 8 alla frazione $\frac{5 \times 8}{8 \times 7}$, questa non cambia valore; riducendosi una

siffatta operazione a dividere per 8 il numeratore ed il denominatore della frazione accennata.

292. *Se i due termini della frazione dividendo sono esattamente divisibili per quelli della frazione divisore, s' ottiene il quoziente con dividere i termini della prima frazione rispettivamente per i termini della seconda.*

Così, $\frac{28}{40} : \frac{7}{8} = \frac{4}{5}$.

Infatti, per la dimostrazione (n.° 290) il quoziente di $\frac{28}{40}$ diviso per $\frac{7}{8}$ s' ottiene dividendo $\frac{28}{40}$ per 7, e moltiplicando il risultato dell' operazione per 8. Ma dividendo il numeratore 28 per 7 la frazione resta divisa per 7 (n.° 247), e viceversa dividendo il denominatore 40 per 8 la frazione $\frac{4}{40}$, che risulta dalla prima divisione, resta moltiplicata per 8 (n.° 248), dunque $\frac{4}{5}$ è il quoziente richiesto.

293. *Per dividere un numero intero per una frazione, bisogna moltiplicare questo numero per la frazione divisore rovesciata.*

Così, $12 : \frac{5}{9} = \frac{108}{5} = 21\frac{3}{5}$.

La dimostrazione di questa regola è quella stessa che è stata fatta più sopra (n.° 290).

294. *Se si dovesse dividere un intero e fratto per un intero e fratto, allora bisogna prima ridurre intero e fratto ad un fratto solo, e poi operare con la regola data* (n.° 288).

Così, $7\frac{3}{4} : 8\frac{2}{5} = \frac{31}{4} : \frac{42}{5} = \frac{31 \times 5}{4 \times 42}$.

295. *Quando poi s' avesse a dividere un intero e fratto per un intero, allora si dividerà successivamente la parte intera e la parte fratta del dividendo pel divisore, badando di aggiungere alla parte fratta, prima di dividerla, il resto, che potrebbe risultare dal dividere la parte intera pel divisore.*

Sia, per esempio, da dividersi $18\frac{3}{5}$ per 7. Dividendo 18 per 7, s' ha il quoziente 2 col resto 4. Aggiungendo questo resto a $\frac{3}{5}$, si ha $4\frac{3}{5}$, che ridotto ad espressione frazionaria equivale a $\frac{23}{5}$; finalmente, la divisione di $\frac{23}{5}$ per 7 dà $\frac{23}{35}$, dunque il quoziente richiesto è $2\frac{23}{35}$.

ARTICOLO V.

Frazioni di frazioni.

296. Si dice *frazione di frazione* una espressione, con cui si indica che una data frazione si deve dividere in più parti eguali, e prendere una o più di queste parti.

Così, l' espressione $\frac{2}{3}$ *di* $\frac{5}{7}$ è una frazione di frazione, la quale indica che si devono prendere *i due terzi di* $\frac{5}{7}$, vale a dire che si deve dividere $\frac{5}{7}$ in tre parti eguali, e prendere due di queste parti.

Or, dalle cose dimostrate (n.° 281) apparisce che prendere i due terzi di $\frac{5}{7}$ equivale a moltiplicare $\frac{2}{3}$ per $\frac{5}{7}$; il che dà il prodotto $\frac{10}{21}$, dunque

Per ridurre una frazione di frazione ad una sola frazione, bisogna moltiplicare fra loro le frazioni date..

297. Se ora si proponesse di trovare i $\frac{4}{9}$ di $\frac{10}{21}$, è chiaro che ciò equivale a trovare *i* $\frac{4}{9}$ *di* $\frac{2}{3}$ *di* $\frac{5}{7}$.

Questa espressione dicesi *frazione di frazione di frazione*; e si riduce ad una sola frazione con moltiplicare fra loro le frazioni accennate.

ARTICOLO VI.

Estrazione della radice quadrata, e cubica delle frazioni

298. Richiamando in questo luogo le definizioni del quadrato e del cubo, e la regola data per la moltiplicazione delle frazioni, si conchiude che

Per formare il quadrato, o il cubo, di una frazione, bisogna elevare separatamente a quadrato, o a cubo, i due termini della frazione medesima. Da ciò segue che

Se i due termini di una frazione sono quadrati, o cubi perfetti, s' avrà la radice quadrata, o cubica di questa frazione, estraendo separatamente le radici quadrate, o cubiche de' suoi due termini.

Così, $\sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{5}{8}$, $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$.

299. Vedremo a suo luogo ciò che dovrà farsi, quando i termini della frazione proposta non sono entrambi quadrati, o cubi perfetti.

ARTICOLO VII.

Osservazioni sul calcolo delle frazioni ordinarie.

300. Le regole esposte in questo capitolo spettano al calcolo delle frazioni, che si dicono *ordinarie*, a fine di distinguerle da altre specie di frazioni, delle quali parleremo in appresso. Qui faremo alcune osservazioni sul calcolo accennato.

301. Le operazioni, che richiede il calcolo delle frazioni ordinarie, si riducono sempre ad operazioni dello stesso genere effettuate sopra numeri interi. Quindi i teoremi relativi ai numeri interi, e le prove delle operazioni spettanti a questi stessi numeri, si applicano egualmente alle frazioni..

302. Poichè il prodotto si forma per mezzo del moltiplicando precisamente come il moltiplicatore si forma per mezzo dell'unità (n.° 112), ne segue che

Quando si moltiplicano fra loro due frazioni, il prodotto è minore del moltiplicando, se il moltiplicatore è una frazione vera.

Quindi il quadrato, o il cubo di una frazione vera dovrà avere un valore più piccolo di questa frazione. Per esempio, il quadrato

della frazione $\frac{3}{4}$ è $\frac{9}{16}$. questa frazione è minore della prima, perchè $\frac{3}{4}$ equivale a $\frac{12}{16}$. Similmente, il cubo di $\frac{2}{3}$ è $\frac{8}{27}$, e questa frazione è minore della prima, perchè $\frac{2}{3}$ equivale a $\frac{18}{27}$.

303. Poichè il dividendo è uguale al prodotto del quoziente moltiplicato pel divisore, ne segue che

Quando il divisore è una frazione vera, il dividendo dev' esser minore del quoziente.

304. Abbiam detto (n.° 80) che la divisione s' indica con mettere una linea, o due punti fra il dividendo ed il divisore. Trattandosi di frazioni si usa ordinariamente di mettere due punti, ma giova talvolta di mettere la linea. Se si dovesse, per esempio, indicare che $\frac{3}{4}$ si deve dividere per $\frac{2}{5}$, in vece di scrivere $\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$, come fin qui abbiam praticato, si potrebbe scrivere $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}}$, badando di dare più lunghezza alla linea, che separa le due frazioni, che a quelle che separano i due numeratori dai loro rispettivi denominatori. Parimente, se si volesse dinotare che l' intero 7 deve esser diviso per la frazione $\frac{5}{8}$, si potrebbe scrivere: $\dfrac{7}{\frac{5}{8}}$.

Finalmente, se occorresse di dover indicare che l' intero 7 si deve dividere per l' intero e fratto $9\frac{3}{4}$, si scriverà $\dfrac{7}{9\frac{3}{4}}$

Ne' casi accennati si farà la divisione nel modo che segue.

Nel primo, si moltiplicheranno i termini estremi 3 e 5: e poi i due medj 4 e 2; il primo prodotto sarà il numeratore, ed il secondo il denominatore del quoziente.

Nel secondo, si moltiplicheranno i due estremi 7 e 8, ed il prodotto si dividerà pel medio 5.

Nel terzo, si ridurrà primieramente l' intero e fratto $9\frac{3}{4}$ ad un fratto solo $\frac{39}{4}$, e poi si opererà come nel caso precedente.

Finalmente, vi potrebbe essere un altro caso, cioè quello in cui si dovesse indicare che una frazione si deve dividere per un intero. Questo caso è semplicissimo, ed ognun vede come allora si deve fare la divisione.

Così, $\dfrac{\frac{3}{4}}{8}$ dà $\frac{3}{32}$.

CAPITOLO IV.

FRAZIONI DECIMALI

305. Una frazione prende il nome di *frazione decimale*, quando ha per denominatore l' unità seguita da uno, o più zeri. Si potrebbe dire ancora che una frazione si dice decimale, quando ha per denominatore una potenza di 10. In tal caso, bisognerà ricordarsi che 10 è la prima potenza di 10, che 100 è la seconda, 1000 la terza, ecc. (n.° 136).

Dalle cose precedenti apparisce che $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{132}{1000}$, ecc., sono frazioni decimali.

306. Le frazioni decimali si considerano in un modo speciale, perchè hanno la proprietà di potersi scrivere come se fossero numeri interi, sottintendendo il denominatore. Così, in vece di scrivere $\frac{3}{10}$, si scrive 0, 3, in vece di $\frac{7}{100}$ si scrive 0, 07, in vece di $\frac{132}{1000}$ si scrive 0, 132, ecc.

La ragione di questa maniera di scrivere risulta dalle seguenti considerazioni.

307. Le frazioni decimali si compongono di parti dell'unità che diminuiscono in ragion declupla, ossia che divengono di dieci in dieci volte più piccole. Infatti, un *decimo* è dieci volte più grande di un *centesimo*, e questo è dieci volte più grande di un *millesimo*, ec. Or nel sistema di numerazione (n° 33) si è convenuto che: *ogni cifra posta a sinistra d' un' altra acquista un valore dieci volte più grande di quello che avrebbe, se occupasse il posto di quest' ultima*, dunque ogni cifra posta a destra di un' altra deve rappresentare unità dieci volte più piccole di quelle indicate dalla cifra, che le sta a sinistra. Da ciò segue che se alla destra delle unità semplici si scrivesse una cifra, questa dovrebbe rappresentare *decimi*, ossia le parti decime dell' unità: quella che si scriverebbe alla destra della cifra de' decimi dovrebbe rappresentare *centesimi*, ossia le parti centesime dell' unità: in seguito verrebbe la cifra de' *millesimi*, de' *diecimillesimi*, de' *centomillesimi* de' *milionesimi* ecc.

Quindi si possono rappresentare le diverse collezioni d' unità decimali, che contiene un numero, con le stesse cifre, che rappresentano le unità intere, facendo occupare a queste cifre i posti, che loro competono secondo la convenzione più sopra nominata. Se non che, a fine di non confondere la parte decimale colla parte intera, si è convenuto di metter fra loro una virgola.

Così, nelle frazioni 0, 3, 0, 07, 0, 132, lo zero occupa il luogo delle unità intere, perchè le frazioni *tre decimi*. *sette centesimi*, *cento trentadue millesimi*, sono frazioni vere. Ma se s avesse a scrivere 8 $\frac{3}{10}$, ossia *otto unità e tre decimi*, allora si scriverà 8, 3.

Quando non vi sono unità intere, allora si ha la *frazione decimale* propriamente detta: ma quando vi sono unità intere, allora si ha il *numero decimale*. Purtuttavolta, essendo il numero decimale una frazione decimale spuria, sotto al nome di frazione decimale si comprende tanto la frazione decimale propriamente detta, quanto il numero decimale. Giova avvertire che le cifre poste a destra della virgola si chiamano *cifre decimali*, o semplicemente *decimali*.

308. Dalle cose precedenti si deduce che

Per scrivere in cifre una frazione decimale espressa in linguaggio ordinario, si scriverà primieramente la parte intera,

alla cui destra si metterà una virgola; poi alla destra di questa si scriveranno successivamente le cifre, che rappresentano i decimi, i centesimi, i millesimi, ecc. che contiene l'enunciato, badando a mettere uno zero quando manca qualche ordine di unità decimali. Se non vi fosse parte intera, allora si scriverà uno zero per tener luogo di questa parte.

Sia, per esempio, da scriversi il numero *trentaquattro unità, cinquantaquattro centomillesimi.* Si scriveranno in primo luogo le 34 unità: in seguito, osservando che i centomillesimi occupano il quinto posto dopo la virgola, e che in 54 centomillesimi due soli posti sono occupati, bisognerà supplire agli altri con tre zeri, e però il numero richiesto sara 34, 00054.

309. Viceversa, volendo leggere in linguaggio ordinario una frazione decimale scritta in cifre è manifesto che la difficoltà si riduce alla lettura delle parte decimale. Or una frazione decimale non è che una frazione ordinaria, il cui denominatore è 10, 100, 1000, ecc., per conseguenza il denominatore sottinteso nella parte decimale del numero proposto, dev' essere l'unità seguita da tanti zeri, quante sono le cifre contenute nel numeratore, ossia nella parte decimale medesima. Così, nel numero 25, 3204 il denominatore sottinteso della parte decimale 3204 dev' essere 10000; e però il numero accennato davrà enunciarsi dicendo: *venticinque interi, tremila duecento quattro diecimillesimi.*

Quindi si conchiude che

Per leggere in linguaggio ordinario una frazione decimale scritta in cifre, bisogna enunciare prima la parte intera, poi quella posta a destra della virgola come se fosse una frazione, il cui numeratore è la parte medesima, ed il denominatore è l'unità seguita da tanti zeri, quante sono le cifre di essa parte.

310. Ciò che precede si riferisce alla origine, ed alla numerazione delle frazioni decimali, passeremo ora a parlare di alcune proprietà delle frazioni medesime.

311. *Una frazione decimale non cambia valore, se s' aggiungano, o si sopprimano alla sua destra uno o più zeri.*

Così, 0, 32 equivale a 0, 3200, e 72,48000 a 72, 48,

Infatti, la trasformazione, che in tal caso subisce una frazione decimale, si riduce a moltiplicare o a dividere per uno stesso numero il suo numeratore ed il suo denominatore sottinteso.

312. *In una frazione decimale, se si sposta la virgola di uno o più posti verso la destra, o verso la sinistra, la frazione medesima sarà moltiplicata nel primo caso, e divisa nel secondo per l'unità seguita da tanti zeri, quanti sono i posti percorsi dalla virgola.*

Sia proposto, per esempio, il numero decimale 12,346. Spostando la virgola di due posti verso la destra, s' avrà il numero 1234,6, che sarà 100 volte più grande del numero dato. Per l'opposto, se si faccia muovere la virgola di due posti verso la sinistra, risulterà il numero 0,12346, che sarà 100 volte più piccolo del

numero proposto. Se la virgola facesse tre passi verso la sinistra, s'avrebbe il numero 0,012346, che sarebbe 1000 volte più piccolo del numero dato, ecc..

La ragione è chiara, perchè quando la virgola s'avanza di un posto, per esempio, verso la dritta, ciascuna cifra s'avanzerà pure di un posto verso la sinistra; e però rappresenterà unità 10 volte più grandi di quelle, che prima rappresentava, giusta la convenzione fatta nel sistema di numerazione. Quindi tutte le parti del numero proposto divengono 10 volte più grandi, vale a dire lo stesso numero rimane moltiplicato per 10.

313. Dalle cose precedenti apparisce che *un numero intero si può considerare come un numero decimale, mettendo una virgola alla destra della cifra delle unità, e quanti zeri si vogliono alla destra di questa virgola.*

Da ciò segue che un numero intero si divide per 10, 100, 1000, ecc., con distaccare per mezzo di una virgola una, due, tre cifre, ecc. alla destra di esso numero. Quindi il numero 7458 diviso per 10 dà 745,8, per 100 dà 74,58, per 1000 dà 7,458, per 10000 dà 0,7458, per 100000 dà 0,07458, per 1000000 da 0,007458, ecc..

314. Finalmente, giova osservare che quando è dato un numero decimale si può comprendere in un solo enunciato la parte intera e la parte decimale. Sia, per esempio, il numero decimale 25,3204, di cui si è parlato più sopra. È questo un intero unito ad una frazione; perciò riducendo l'intero e fratto ad un solo fratto, si dovrebbe moltiplicare 25 per 10000, aggiungere al prodotto 3204, e scrivere 10000 al denominatore. Or dalle cose precedenti apparisce che questa operazione si riduce a togliere la virgola nel numero proposto, ed a scrivere 10000 sotto questo numero. Dunque

Per comprendere in un solo enunciato la parte intera, e la parte decimale di un numero dato, bisogna enunciare questo numero come se fosse intero, non tenendo conto della virgola; poi s'enuncierà il denominatore sottinteso, che è l'unità seguita da tanti zeri, quante sono le cifre contenute nella parte decimale del numero proposto.

Con questa regola il numero 25,3204 s'enuncia dicendo: *duecento cinquantatre mila, duecento quattro diecimillesimi.*

CAPITOLO V.

CALCOLO DELLE FRAZIONI DECIMALI.

315. Le frazioni decimali avendo la proprietà di poter essere scritte senza che il denominatore sia espresso; ed essendo inoltre le unità decimali sottoposte alla stessa legge di composizione delle unità intere, ne segue che il calcolo delle frazioni decimali dev'es-

ser così semplice come quello de' numeri interi. Ciò si vedrà negli articoli che seguono (e).

ARTICOLO I.

Addizione delle frazioni decimali.

316. *Per sommare le frazioni decimali, si scrivano le une sotto alle altre, di guisa che le unità dello stesso ordine si corrispondano in una medesima colonna; in seguito si faccia l'addizione come ne' numeri interi, e nella somma si scriva la virgola sotto alle altre.*

Applicando questa regola alle frazioni decimali, che si vedono al margine, si troverà facilmente la loro somma.

La dimostrazione apparisce manifesta da ciò che è stato detto più sopra (n.° 315), vale a dire che essendo le unità decimali sottoposte alla stessa legge di composizione delle unità intere, l'addizione delle frazioni decimali dovrà farsi come quella de' numeri interi.

47,509
5,8634
0,94
7,864
0,5
————
62,6764

ARTICOLO II.

Sottrazione delle frazioni decimali.

317. *Per fare la sottrazione delle frazioni decimali, si scriva la minore sotto alla maggiore, di modo che le unità dello stesso ordine si corrispondano in una medesima colonna; indi si faccia la sottrazione come ne' numeri interi, e nel resto si scriva la virgola sotto alle altre.*

Se il numero delle cifre decimali non è eguale nel sottraendo e nel sottrattore, si possono scrivere a destra di quello, che ne contiene meno, tanti zeri quante sono le cifre decimali di più nell' altro. Ciò non è assolutamente necessario, potendosi i detti zeri sottintendere.

Applicando questa regola alle due frazioni scritte al margine, e concependo due zeri a destra del sottraendo, s' avrà facilmente il resto.

La dimostrazione è come quella, che più sopra si è fatta per l' addizione.

9,73
4,2586
————
5,4714

(e). Il calcolo delle frazioni decimali fu introdotto nell' Aritmetica da Simone Stevino, matematico Fiammingo, che con questa invenzione rese un servizio segnalato alle Matematiche.

ARTICOLO III.

Moltiplicazione delle frazioni decimali.

318. *Per moltiplicare tra loro due frazioni decimali, bisogna fare la moltiplicazione di queste come se fossero numeri interi, non tenendo conto delle virgole. In seguito si separeranno a destra del prodotto con una virgola tante cifre decimali quante ne contengono i due fattori.*

Applicando questa regola alle due frazioni scritte al margine, si troverà che il prodotto di 973 per 586 è 570178: separando poi a destra di questo prodotto cinque cifre decimali, s' avrà il prodotto richiesto 5,70178.

9,73
0,586
5,70178

Infatti, togliendo la virgola al moltiplicando, questo diviene 100 volte più grande (n.° 312): similmente togliendo la virgola al moltiplicatore, questo diviene 1000 volte più grande; per conseguenza il prodotto diviene 100000 volte più grande (n.° 110). Quindi per avere il vero prodotto bisogna dividere 570178 per 100000; il che dà 5,70178 (n.° 313).

ARTICOLO IV.

Divisione delle frazioni decimali.

319. Nella divisione delle frazioni decimali si possono considerare tre casi, secondo che il divisore o è espresso dall' unità seguita da zeri, o è un numero intero qualunque, o infine contiene decimali.

320. *I. Caso. Per dividere una frazione decimale per l' unità seguita da zeri, basta muovere la virgola di tanti posti verso la sinistra, quanti sono gli zeri del divisore.*

La dimostrazione di questa regola si deduce dalle cose dette (n.° 312).

321. *II. Caso. Per dividere una frazione decimale per un numero intero, si farà la divisione come ne' numeri interi, senza tener conto della virgola. In seguito, si separeranno nel quoziente, con una virgola, tante cifre a destra, quante sono le cifre decimali contenute nel dividendo.*

Sia proposto, per esempio, a dividere 91,46 per 8. Fatta la divisione, come se la virgola non esistesse, il quoziente sarà 1143, ed il resto 2. Ma il dividendo contiene due cifre decimali, dunque il quoziente richiesto è 11,43, ed il resto è 0,02.

Infatti, il quoziente di 9146 diviso per 8 è 1143 $\frac{2}{8}$ (n.° 83), e questo è 100 volte più grande del quoziente richiesto, perchè il dividendo 9146 è 100 volte più grande di 91,46 (n.°312); per conseguenza il quoziente richiesto dev'essere eguale a 1143 diviso

per 100 coll' aggiunta di $\frac{4}{8}$ diviso per 100, vale a dire dev' essere eguale a 11,43 coll' aggiunta di 0,02 diviso per 8. Quindi non volendo tener conto del resto, il quoziente è 11,43: l'errore sarà al di sotto di $\frac{1}{100}$, perchè il vero quoziente è compreso fra 11,43 e 11,44.

322. Se si volesse che l' errore accennato fosse al di sotto di $\frac{1}{1000}$, di $\frac{1}{10000}$, di $\frac{1}{100000}$, ecc., è manifesto che basterà aggiungere uno zero, due zeri, tre zeri, ecc. a destra del dividendo, perchè allora s' avranno al quoziente i millesimi, i diecimillesimi, i centomillesimi, ecc.

È poi manifesto che in vece di aggiungere gli zeri accennati a destra del dividendo, si possono aggiungere ad uno ad uno cominciando dall ultimo resto. Nell' esempio annesso si trova che l' ultimo resto è 2; aggiungendo a destra di questo uno zero, si ha il numero 20, che diviso per 8 dà la cifra 2 de' millesimi: volendo un' altra cifra decimale s' aggiungerà uno zero al resto 4, e si dividerà 40 per 8, il quoziente sarà la cifra 5 de' diecimillesimi; e siccome il resto è zero, così si conchiude che il quoziente esatto è 14,4325.

91,46	8
11	11,4325
34	
26	
20	
40	

323. Supponiamo ora che si debba dividere 0,348 per 7246. Togliendo la virgola si dovrebbe dividere 348 per 7246; ma questa operazione non può farsi, perciò s' aggiungeranno almeno due zeri a destra del dividendo: questa aggiunzione non ne fa cambiare il valore (n.° 311), e s' avrà a dividere 34800 per 7246, il quoziente dovrà contenere cinque cifre decimali, ossia sarà 0,00004. Si potrebbero avere altre cifre decimali con aggiungere altri zeri a destra del dividendo, ed operando come si è detto più sopra.

324. Similmente, volendo dividere 2,35 per 874, e non potendo farsi la divisione, si dovrà aggiungere almeno uno zero a destra del dividendo, il quoziente sarà 0,002 con un resto.

325. *III. Caso. Quando il divisore è una frazione decimale, allora si sopprime la virgola in esso divisore, e nel dividendo si trasporta tanti posti verso la sua destra, quante sono le cifre decimali contenute nel divisore; il che riduce questo caso al caso precedente.*

Sia proposto, per esempio, a dividere 215,889 per 4,7. Applicando la regola precedente si dovrà dividere 2158,89 per 47; il che non altera il quoziente, perchè il dividendo ed il divisore si trovano ambidue moltiplicati per 10. Operando come si è detto nel secondo caso si troverà il quoziente 45,93, ed il resto 18. Bisogna nondimeno avvertire che questo resto non rappresenta centesimi, ma millesimi. Infatti, il dividendo ed il divisore proposti sono stati moltiplicati per 10: or il dividendo è eguale al divisore moltiplicato pel quoziente, più il resto, dunque anche il resto è stato moltiplicato per 10, e però il resto cercato è 0,18 diviso per 10, ossia 0,018.

326. Sia ancora da dividersi 215889 per 4,7. L'applicazione della regola precedente conduce a dividere 2158890 per 47; il quoziente sarà 45933, ed il resto 3,9 per le ragioni sopraddette.

ARTICOLO V.

Elevazione di una frazione decimale a quadrato, ed a cubo.

327. *Per elevare a quadrato una frazione decimale, basta moltiplicarla per se stessa, il prodotto sarà il quadrato richiesto.*

Così, il quadrato di 4,7 è 22,09.

328. Poichè la regola della moltiplicazione delle frazioni decimali esige che il prodotto deve contenere tante cifre decimali, quante ve ne sono ne' due fattori, si conchiude che *il numero delle cifre decimali del quadrato è sempre doppio di quello della radice.*

329. *Per elevare a cubo una frazione decimale, basta moltiplicarla pel suo quadrato, il prodotto sarà il cubo richiesto.*

Così, il cubo di 4.7 è 103,823.

330. Dalla regola della moltiplicazione delle frazioni decimali si deduce che *il numero delle cifre decimali del cubo è sempre triplo di quello delle cifre decimali contenute nella radice.*

ARTICOLO VI.

Estrazione della radice quadrata, e cubica delle frazioni decimali.

331. *Per estrarre la radice quadrata di una frazione decimale, bisogna distinguere due casi, secondo che il numero delle cifre decimali è pari, o impari.*

Nel primo caso, si estrae la radice quadrata della frazione proposta, come se fosse un numero intero, non tenendo conto della virgola: poi si separano nel risultato, con una virgola, verso la destra, tante cifre quante sono le coppie delle cifre decimali contenute nella frazione proposta.

Nel secondo caso, s' aggiungerà uno zero a destra della frazione proposta; il che riduce questo caso al primo, senza alterare la frazione medesima.

Applicando questa regola alla frazione decimale 22,3729 si troverà che la sua radice quadrata è 4,73.

La dimostrazione della regola accennata risulta dalle cose dette (n.° 328).

332. *Per estrarre la radice cubica di una frazione decimale, bisogna distinguere due casi, secondochè il numero delle cifre decimali è o non è un multiplo di 3.*

Nel primo caso, s' estrae la radice cubica della frazione proposta, come se fosse un numero intero, non tenendo conto della virgola: poi si separano a destra di questa radice, con una vir-

gola, tante cifre, quante sono le classi delle cifre decimali contenute nella frazione proposta.

Nel secondo caso, s' aggiungeranno a destra della frazione proposta uno o due zeri, secondo che si richiederà per rendere il numero delle cifre decimali un multiplo di 3. In tal modo si ricade nel caso precedente, senza alterare la frazione proposta.

Applicando questa regola alla frazione decimale 105,821817 si troverà che la sua radice cubica è 4,73.

La dimostrazione della regola accennata si deduce dalle cose dette (n.° 330).

ARTICOLO VII.

Osservazioni sul calcolo delle frazioni decimali.

333. Quando si dovessero sottoporre al calcolo le frazioni decimali ed i numeri interi accompagnati da frazioni ordinarie, in tal caso bisogna metter prima i decimali sotto forma di frazioni ordinarie, a fine di poter fare le operazioni sopra numeri interi uniti a frazioni ordinarie; il che non produce alcuna difficoltà.

Così, se si dovesse operare su i numeri 8,3 e $6\frac{3}{4}$, si metteranno sotto forma frazionaria, il che dà $\frac{83}{10}$ (n.° 314), e $\frac{27}{4}$ (n.° 251), e sotto questa forma si potranno fare facilmente le operazioni del calcolo sui numeri proposti.

334. L'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione, la divisione, l'elevazione a potenza. e l'estrazione di radice sui numeri decimali si verificano con le regole date per i numeri interi.

CAPITOLO VI.

TRASFORMAZIONE DELLE FRAZIONI ORDINARIE IN FRAZIONI DECIMALI.

335. Il calcolo delle frazioni decimali essendo assai più semplice di quello delle frazioni ordinarie, si cerca di trasformare queste in frazioni decimali.

ARTICOLO I.

Trasformazione di una frazione ordinaria in una frazione decimale di dato denominatore.

336. La trasformazione di una frazione ordinaria in frazione decimale equivale alla trasformazione di una frazione in un'altra, che abbia per denominatore 10, 100, 1000, ecc....

Questa quistione è stata già risoluta (n.° 266) in un modo generale. Se dunque il denominatore è dato, *non si dovrà far altro che moltiplicare la frazione proposta per questo denominatore ;*

il che si riduce a scrivere a destra del numeratore tanti zeri, quanti ne contiene il dato denominatore; estrarre le unità del prodotto, e dividere il numero intero, che ne risulta, pel denominatore medesimo.

Sia, per esempio, da ridursi la frazione $\frac{5}{8}$ ad una frazione decimale che abbia per denominatore 1000; il che si esprime per brevità con dire *ridurre* $\frac{5}{8}$ *a parti millesime*. Si metteranno tre zeri a destra del numeratore 5, il che dà $\frac{5000}{8}$; indi si dividerà 5000 per 8, e s' avrà il quoziente 625, che diviso per 1000 dà 0,625. Quindi sarà $\frac{5}{8} = 0,625$.

Ma se s'avesse voluto ridurre $\frac{5}{8}$ a parti centesime, in tal caso il quoziente sarebbe stato 62 con un resto; e però 0,62 non potrebbe essere che un valore approssimato di $\frac{5}{8}$, e l'errore sarebbe al di sotto di un centesimo.

ARTICOLO II.

Trasformazione di una frazione ordinaria in frazione decimale, quando non è dato il denominatore.

337. Quando non è dato il denominatore della frazione decimale, che si cerca, *bisogna concepire il numeratore della frazione ordinaria proposta come seguito da un numero indefinito di zeri. In seguito, si farà la divisione di questo numeratore così preparato pel denominatore della frazione proposta, e si separeranno alla destra del quoziente tante cifre decimali, quanti sono gli zeri adoperati.*

La ragione di questa regola si deduce dalle cose dette (n.° 266 e 321).

Sia, per esempio, da ridursi in decimali la frazione $\frac{7}{16}$. Si divide 7 per 16, mettendo 0 al quoziente in luogo delle unità. A destra di 7 si mette uno zero: si divide 70 per 16, il quoziente è 4, ed il resto 6; si continua in tal modo finchè si siano adoperati successivamente quattro zeri; il che equivale a metterli alla destra di 7.

```
 70   | 16
 60   |--------
120   | 0,4375
 80
```

Sia proposto in secondo luogo di ridurre in decimali la frazione $\frac{5}{11}$.

L'operazione si farà come nell'esempio precedente; ma non avrà fine. Infatti, il resto della seconda divisione parziale è 5, cioè il numeratore stesso della frazione proposta; e poichè si deve mettere uno zero a destra del resto accennato, ne segue che il terzo dividendo parziale è identico al primo. Quindi si dovrà trovare per terzo quoziente, e per terzo resto, il primo quoziente, ed il primo resto; e per conseguenza proseguendo la divisione ritornerà il secondo dividendo parziale, il secondo quoziente, ed il secondo

```
 50   | 11
 60   |---------
  50  | 0,4545...
  60
   5
```

resto, e così in seguito. Da ciò apparisce che le cifre 4 e 5 ritorneranno periodicamente ed indefinitamente nella espressione della frazione decimale equivalente alla frazione proposta $\frac{5}{11}$; e però s' avrà $\frac{5}{11}=0,454545........$

Similmente, si trova che

$$\frac{5}{6}=0,83333......, \frac{7}{12}=0,58333....$$

338. Le frazioni decimali, in cui le stesse cifre ritornano periodicamente ed indefinitamente, si chiamano *frazioni decimali periodiche*. Il *periodo* è formato dal numero delle cifre che ritornano.

Il periodo può cominciare immediatamente dopo la virgola, come nella frazione 0,454545....., e può cominciare dopo alcune cifre irregolari, come nelle frazioni 0,8333...., 0,58333..... Nel primo caso, la frazione decimale dicesi *frazione periodica semplice*, nel secondo *frazione periodica mista*.

ARTICOLO III.

Condizioni, che debbono avverarsi, affinchè una frazione ordinaria possa trasformarsi esattamente in decimali.

339. Abbiam veduto (n.° 337) che per ridurre una frazione ordinaria in decimali, bisogna scrivere un certo numero di zeri a destra del suo numeratore, e dividere in seguito il numeratore così preparato pel denominatore. Quindi, una frazione ordinaria potrà ridursi esattamente in decimali, quando il prodotto del suo numeratore per l' unità seguita da un certo numero di zeri sarà divisibile esattamente pel denominatore. Or si è dimostrato (n.° 219) che un numero è divisibile esattamente per un altro, quando contiene tutti i fattori primi di quest' altro, dunque il prodotto del numeratore per l' unità seguita da zeri sarà divisibile esattamente pel denominatore, allorchè si troveranno in esso tutt' i fattori primi del denominatore. Ma l' unità seguita da zeri è una potenza di 10, la quale ha per fattori primi 2 e 5, dunque, se la frazione proposta è irreducibile, la divisione accennata riuscirà esattamente, quando il denominatore non contenga altri fattori primi che 2 e 5. Da ciò si conchiude che

Per trasformare esattamente in decimali una frazione ordinaria irreducibile, bisogna che il denominatore non contenga che potenze di 2 *e di* 5, *qualunque siasi d' altronde il numeratore.*

Per esempio, la frazione $\frac{3}{40}$ si può esattamente ridurre in decimali, perchè $40=2^3\times5$. Infatti, si trova $\frac{3}{40}=0,075$.

340. Quando una frazione ordinaria irreducibile potrà ridursi esattamente in una frazione decimale, questa *sarà composta di*

tante cifre decimali, quante sono le unità contenute nel più alto esponente de' fattori 2 e 5, che stanno nel denominatore.

Infatti, se a destra del numeratore si mettano tanti zeri, quante sono le unità contenute nel più alto esponente de' fattori 2 e 5 del denominatore, è chiaro che nel numeratore accennato s' introdurranno tutti i fattori primi 2 e 5, che si trovano nel denominatore; e per conseguenza la divisione potrà farsi esattamente. Se non che, il quoziente si troverà moltiplicato dall' unità seguita da tanti zeri, quanti sono quelli posti a destra del numeratore. Quindi s' avrà il vero quoziente separando nel quoziente trovato verso la destra tante cifre decimali, quanti sono gli zeri scritti a destra del numeratore, ovvero quante unità si contengono nel più alto esponente de' fattori 2 e 5 del denominatore.

341. Quando la frazione è irreducibile, e la condizione sopraddetta (n.° 339) non s' avvera, allora la frazione non si potrà ridurre che in una frazione decimale periodica.

Infatti, essendo il resto di una divisione sempre minore del divisore, ne segue che la divisione del numeratore seguito da un numero indefinito di zeri pel denominatore, non può dare un numero di resti parziali differenti maggiore del numero delle unità meno una contenute nel denominatore medesimo. Quindi, dopo un numero di divisioni, che potrà al più esser eguale al denominatore diminuito di una unità, si dovrà ricadere sopra uno de' resti ottenuti precedentemente. E poichè si dovrà scrivere uno zero alla destra di questo resto, a fine di proseguire la divisione, è chiaro che si dovrà ritrovare uno de' dividendi parziali precedenti; e però s' avrà il ritorno periodico degli stessi quozienti e degli stessi resti. Dunque la frazione decimale richiesta sarà periodica, *ed il periodo avrà al più tante cifre, quante sono le unità meno una contenute nel denominatore della frazione proposta.*

CAPITOLO VII.

TRASFORMAZIONE DELLE FRAZIONI DECIMALI IN FRAZIONI ORDINARIE.

342. Una frazione decimale essendo una frazione ordinaria, che ha per denominatore una potenza di 10 (n.° 305), si conchiude che *Per trasformare una frazione decimale in frazione ordinaria, bisogna non tener conto della virgola; poi si prenderà per numeratore la parte decimale, e per denominatore l' unità seguita da tanti zeri, quante sono le cifre decimali.*

Così, $0,48 = \frac{48}{100} = \frac{12}{25}$.

343. Se la frazione decimale contiene interi, ossia se si ha un numero decimale propriamente detto (n.° 307), questo si trasforma in frazione ordinaria *prendendo per numeratore il numero de-*

cimale, facendo astrazione dalla virgola, e per denominatore l'unità seguita da tanti zeri, quante sono le cifre decimali.

Così, $7,25 = \frac{725}{100} = \frac{145}{20} = \frac{29}{4} = 7\,\frac{1}{4}$.

344. Le regole precedenti non si possono applicare, quando la frazione proposta è periodica, perchè ciascun termine della frazione ordinaria equivalente dovrebbe esser composto di un numero indefinito di cifre. Quindi in tal caso convien ricorrere ad altre regole.

345. Possono accadere due casi, vale a dire la frazione periodica proposta può esser semplice, o mista.

346. *I. Caso.* Sia proposto di ridurre in frazione ordinaria la frazione periodica 0,2727...

S'osservi che le frazioni $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{999}$, ecc. ridotte in decimali danno le frazioni periodiche 0,111..., 0,0101..., 1,001001... Quindi si può considerare la frazione 0,2727... come il prodotto di 27 per 0,0101..., o per $\frac{1}{99}$; e per conseguenza s'avrà $0,2727 = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$. Similmente, 0,666... sarà eguale a $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. Dunque

Per trasformare una frazione decimale periodica in frazione ordinaria, bisogna prendere per numeratore il periodo, e per denominatore un numero composto di tanti 9 successivi, quante sono le cifre del periodo.

347. *II. Caso.* Sia proposto di ridurre a frazione ordinaria la frazione periodica mista 0,5333....

Trasportando la virgola all'origine del periodo, s'avrà il numero decimale 5,333..., ossia un numero 10 volte più grande della frazione proposta. Ma 0,333... equivale a $\frac{3}{9}$, ovvero a $\frac{1}{3}$ (n,° 346), dunque 5,333... dovrà equivalere a $5\,\frac{1}{3} = \frac{16}{3}$. Quindi dividendo questa frazione per 10, s'avrà $\frac{16}{30}$, ovvero $\frac{8}{15}$, che sarà la frazione ordinaria equivalente alla frazione periodica proposta. Dunque

Per ridurre una frazione periodica mista a frazione ordinaria, bisogna trasportare la virgola all'origine del periodo, e cercare la frazione ordinaria, che equivale a tutta la parte periodica. In seguito, si unirà questa frazione all'intero, e se ne farà una sola espressione frazionaria. Finalmente, si moltiplicherà il denominatore di quest'ultima frazione per una potenza di 10, che sarà indicata dal numero delle cifre contenute nella parte non periodica della frazione proposta.

CAPITOLO VIII.

FRAZIONI CONTINUE.

348. Si dà il nome di *frazione continua* ad una espressione composta di una parte intera, che può esser nulla, più una frazione, il cui numeratore è l' unità, ed il denominatore un numero intero più una frazione, che ha per numeratore l' unità, e per denominatore un numero intero più una frazione, e così in progresso.

ARTICOLO I.

Riduzione di una frazione ordinaria in frazione continua.

349. Sia la frazione $\frac{13}{30}$: questa non cambia valore, se si dividono ambedue i termini per 13; il che dà la frazione $\frac{1}{\frac{30}{13}}$. Effettuando la divisione indicata nel denominatore, s'avrà la frazione $\frac{1}{2+\frac{4}{13}}$...(1)

Operando sulla frazione $\frac{4}{13}$ come si è fatto sulla proposta, si divideranno i suoi termini pel numeratore 4; il che darà $\frac{1}{\frac{13}{4}}$, ovvero $\frac{1}{3+\frac{1}{4}}$. Mettendo questo valore nell'espressione (1) in luogo di $\frac{4}{13}$, la frazione proposta sarà trasformata in frazione continua e s' avrà

$$\frac{13}{30}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}.$$

350. Riflettendo sulle operazioni precedenti, si vede che si è diviso in primo luogo 30 per 13, non contando come operazione la divisione del numeratore per se stesso, e si è avuto 2 per quoziente e 4 per resto. In seguito, si è diviso 13 per 4, il che ha dato 3 per quoziente ed 1 per resto. Quindi apparisce che la riduzione di una frazione ordinaria in frazione continua richiede quello stesso calcolo, che si fa per trovare il massimo comune divisore fra i due termini della frazione accennata. Infatti, nell' uno e nell' altro caso si divide il termine maggiore pel minore, questo pel primo resto, il primo resto pel secondo, e così in progresso. Dunque

Per ridurre una frazione ordinaria in frazione continua, bisogna fare sopra i suoi termini quella stessa operazione, che si

si fa per trovare il loro massimo comune divisore. Si prosegue l' operazione finchè s' ottiene un resto eguale a zero: i quozienti successivi, che s' ottengono in tal modo, sono i denominatori delle frazioni parziali, che costituiscono la frazione continua. Quando la frazione proposta è spuria, il primo quoziente rappresenta la parte intera, ch' entra nella frazione continua.

ARTICOLO II.

Riduzione di una frazione continua in frazione ordinaria.

351. Le operazioni fatte (n.° 349) per ridurre una frazione ordinaria in frazione continua, fanno conoscere subito il modo da tenersi per rimontare da una frazione continua alla frazione ordinaria equivalente. Infatti, si riprenda la frazione continua $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}$, la quale si compone delle frazioni parziali $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$. All' ultima frazione parziale $\frac{1}{4}$ s' aggiunga il denominatore 3 della frazione precedente, il che dà la frazione spuria $\frac{13}{4}$; per conseguenza $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}$ sarà eguale a $\cfrac{1}{\frac{13}{4}}$, ovvero (n.° 304) a $\frac{4}{13}$: aggiungendo 2 a questa frazione, e riducendo intero e fratto ad un solo fratto si ha $\frac{30}{13}$. Quindi $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}$ sarà eguale a $\cfrac{1}{\frac{30}{13}}$, ovvero a $\frac{13}{30}$, ch' è la frazione ordinaria richiesta. Dunque

Per ridurre una frazione continua in frazione ordinaria, all' ultima frazione parziale s' aggiunga il denominatore della frazione parziale precedente; si rovesci la frazione spuria, che ne risulta, ed a questa frazione rovesciata s' aggiunga il denominatore della frazione parziale precedente; si rovesci la frazione spuria, che ne risulta, e si operi come si è detto risalendo da sotto in sopra. Quando si sarà arrivato ad aggiungere il denominatore della prima frazione parziale, la frazione spuria, che ne risulterà, essendo rovesciata darà la frazione ordinaria equivalente alla frazione continua proposta.

ARTICOLO III.

Proprietà delle frazioni continue.

352. Le frazioni continue godono di molte proprietà importanti; ma ci limiteremo a far conoscere quelle, che sono di uso più comune (d).

353. Le frazioni parziali, di cui più sopra si è parlato, sono state chiamate *frazioni integranti*, perchè la loro somma costituisce la frazione continua. Si è dato poi il nome di *quozienti incompleti* ai denominatori delle frazioni accennate.

354. Si dicono *ridotte* le frazioni ordinarie, che si trovano riducendo successivamente in un solo fratto ciascuna dell' espressioni, che s' ottengono arrestando la frazione continua ad uno qualunque de' quozienti incompleti.

Così, nella frazione continua più sopra considerata, essendo nulla la parte intera, la prima ridotta sarebbe zero, la seconda $\frac{1}{2}$, la terza $\frac{1}{2+\frac{1}{3}}$, ovvero $\frac{3}{7}$; la quarta $\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4}}}$, ovvero $\frac{13}{30}$.

355. *Le ridotte di posto pari sono maggiori, e quelle di posto impari sono minori della frazione continua totale.*

$$\text{Sia } \frac{65}{149}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}}.$$

Essendo nulla la parte intera, la prima ridotta sarà zero; formando poi le altre ridotte, si avranno tutte le ridotte, che sono

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{7},\ \frac{7}{16},\ \frac{17}{39},\ \frac{24}{55},\ \frac{65}{149}.$$

Dinotando con x il valore della frazione continua totale, è manifesto che x è maggiore della prima ridotta, ovvero che questa è minore di x. Per l' opposto, la seconda ridotta è maggiore di x: infatti, paragonando la frazione $\frac{1}{2}$ alla frazione continua totale, il denominatore 2 è minore di 2 più la somma delle frazioni inte-

---

(d) Le frazioni continue furono inventate da Brounckcr, celebre geometra Inglese; ma questi non conobbe le proprietà principali, ed i singolari vantaggi delle frazioni accennate. Una siffatta conoscenza è dovuta ad Ugenio, sommo geometra Olandese.

granti, che seguono. Ma quando diminuisce il denominatore di una frazione, cresce la frazione, dunque la seconda ridotta è maggiore di x. La terza ridotta poi è minore di x: infatti, il denominatore 3 della frazione integrante $\frac{1}{3}$ è troppo piccolo, essendosi trascurata la somma di tutte le seguenti frazioni integranti; per conseguenza $2+\frac{1}{3}$ è maggiore di $2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}$, ecc..

Ma quando cresce il denominatore di una frazione, diminuisce la frazione, dunque $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}$, ovvero $\frac{3}{7}$ dev' esser minore di x. Applicando i ragionamenti precedenti alle altre ridotte, la proposizione enunciata resterà dimostrata.

356. Dalla proprietà precedente apparisce che *il valore della frazione continua totale è compreso fra due ridotte consecutive qualunque.*

Se non che, bisogna tener presente che l' ultima ridotta rappresenta il valore della frazione continua totale.

357. Si deduce ancora dalla proprietà precedente che quando è data una frazione irreducibile, i cui termini sono un poco grandi, si possono trovare valori approssimati di questa frazione, i quali essendo espressi da numeri più semplici permettono di potersi formare una idea più chiara della frazioue medesima. La regola da tenersi in tal caso è la seguente.

Si riduce primieramente la frazione proposta in frazione continua; poi si formano le ridotte consecutive. In tal modo si ha una serie di frazioni alternativamente più grandi e più piccole della frazione proposta, tra le quali si presceglie quella, che dà il grado d' approssimazione, che si desidera.

Così, nell' esempio precedente, se in luogo della frazione irreducibile $\frac{65}{149}$ si prenda la terza ridotta $\frac{3}{7}$, s' avrà nna idea assai più chiara della frazione medesima. E poichè il valore della frazione accennata è compreso tra la seconda ridotta $\frac{1}{2}$ e la terza $\frac{3}{7}$ ne segue che la differenza delle due ridotte dev' esser maggiore della differenza esistente fra la frazione proposta e la terza ridotta. Ma la prima differenza è $\frac{1}{14}$, dunque l' errore che si commette prendendo la terza ridotta in luogo della frazione proposta è al di sotto di $\frac{1}{14}$. Similmente, se in luogo della frazione proposta si prenda la quarta ridotta $\frac{7}{16}$, si troverá che l' errore che si commette è al di sotto del valore della frazione, che ha per numeratore l' unità, e per denominatore il prodotto 7×16 de' denominatori della terza e della quarta ridotta. Prendendo la quinta ridotta, l' errore

sarebbe al di sotto della frazione che ha l' unità per numeratore, e per denominatore il prodotto 16×39 de' denominatori della quarta e della quinta ridotta, e così di seguito. Qnindi si vede con quanta rapidità siffatti errori diminuiscono.

358. Supponiamo ora che sia data la frazione $\frac{348}{924}$.
Trasformandola in frazione oontinua si troveranno le ridotte

$$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{29}{77}.$$

Quindi apparisce che si ha una serie di frazioni ordinarie più semplici della proposta, che bastano a dare di essa una idea più chiara. Inoltre, l' ultima ridotta $\frac{29}{77}$ equivale alla frazione proposta ridotta a minimi termini. Dunque, allorchè si converte in frazione continua una frazione, i cui termini non sono primi fra loro, e che in seguito si formano le ridotte sino all' ultima inclusivamente, non si troverà la frazione proposta sotto la sua forma primitiva, ma si troverà questa stessa frazione ridotta alla sua più semplice espressione.

359. Le cose precedenti bastano a dare l' idea chiara delle frazioni continue: ma le dimostrazioni rigorose delle proprietà di queste non si possono fare senza il soccorso dell' Algebra, per cui si rimette a questa scienza la dottrina compiuta delle frazioni continue.

LIBRO TERZO

NUMERI INCOMMENSURABILI.

360. Ne' due libri precedenti abbiam considerato i numeri interi, ed i numeri fratti: passeremo ora ad occuparci di una terza specie di numeri, che provengono dalla estrazione delle radici dai numeri interi, o fratti, che non sono quadrati, o cubi perfetti.

361. S' intende per *comune misura* di due numeri un terzo numero, che è parte aliquota di ciascuno di loro.

Da ciò segue che ciascuno di questi numeri diviso per la comune misura deve dare per quoziente un numero intero.

362. È manifesto che due numeri interi hanno sempre per comune misura l' unità.

363. Un numero intero ed una frazione hanno sempre per comune misura una frazione, il cui numeratore è l' unità, ed il denominatore quello della frazione proposta. Così, i numeri 8 e $\frac{3}{4}$ hanno per comune misura $\frac{1}{4}$, perche 8 equivale a $\frac{32}{4}$.

364. Due frazioni hanno sempre per comune misura una terza frazione, che ha per numeratore l' unità, e per denominatore il prodotto de' denominatori delle due frazioni date. Così, $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{5}$ hanno per comune misura $\frac{1}{15}$, perchè essendo ridotte allo stesso denominatore la prima equivale a $\frac{10}{15}$ e la seconda a $\frac{12}{15}$.

365. Un numero si dice *commensurabile*, quando ha una comune misura coll' unità.

Quindi i numeri interi e fratti sono commensurabili. Infatti ogni numero intero ha una comune misura coll' unità, che è la stessa unità. Così, 27 e 1 hanno per comune misura 1, perchè 1 divide esattamente 27 ed 1.

Similmente, ogni frazione ha una comune misura coll' unità. Per esempio, $\frac{3}{8}$ ed 1 hanno per comune misura $\frac{1}{8}$, perchè 1 e-

quivale a $\frac{8}{8}$; e però $\frac{3}{8}$ diviso per $\frac{1}{8}$ dà per quoziente 3, e $\frac{8}{8}$ diviso per $\frac{1}{8}$ dà per quoziente 8. Nello stesso modo si dimostra che ogni frazione spuria è un numero commensurabile.

366. Un numero si dice *incommensurabile*, quando non ha alcuna misura coll' unità.

Da ciò segue che un numero sarà incommensurabile, quando non potrà essere espresso esattamente nè da un numero intero, nè da un numero fratto.

CAPITOLO I.

DE' NUMERI INCOMMENSURABILI, CHE PROVENGONO DALLA ESTRAZIONE DELLE RADICI QUADRATE.

367. *Quando un numero intero non è quadrato perfetto, la sua radice è un numero incommensurabile.*

Supponiamo che si debba estrarre la radice quadrata di 53. Vedemmo (n.° 143) che questo numero non è quadrato perfetto, perchè si trova compreso fra 49 e 64, ovvero fra i quadrati di 7 e di 8; e per conseguenza non può esistere alcun numero intero che moltiplicato per se stesso produca 53. Dico ora che la radice quadrata di 53 non può essere espressa esattamente da alcun numero fratto. Infatti, supponiamo che la radice quadrata di 53 possa essere espressa da 7 unità più una frazione, che sia, per esempio, $\frac{3}{4}$. Riducendo intero e fratto ad un solo fratto, s'avrà il fratto irreducibile $\frac{31}{4}$. Elevando questo fratto a quadrato, il risultato dovrebbe essere equivalente a 53; il che non può sussistere, perchè essendo 31 e 4 numeri primi fra loro, i loro quadrati (n.° 220) saranno anche primi fra loro; e per conseguenza è impossibile che il quadrato di $\frac{31}{4}$ sia equivalente a 53, perchè dovrebb' essere il quadrato di 31 divisibile esattamente pel quadrato di 4 contro alle cose dimostrate (n.° 219). Quindi si conchiude che la radice di un numero, che non è quadrato perfetto, non può avere alcuna misura comune coll' unità, perchè se ne avesse una, questa dovrebbe essere l' unità, o una parte aliquota dell' unità, ed allora l'espressione della radice sarebbe un numero intero, o un numero fratto; il che si è dimostrato impossibile.

368. La dimostrazione precedente avrebbe luogo anche quando la frazione $\frac{31}{4}$ non fosse irreducibile, perchè si ridurrebbe prima alla sua più semplice espressione.

369. *Se i due termini di una frazione irreducibile non sono quadrati perfetti, la sua radice quadrata è un numero incommensurabile.*

Sia, per esempio, la frazione irreducibile $\frac{19}{48}$, e supponiamo che la sua radice quadrata possa essere espressa esattamente dalla frazione irreducibile $\frac{5}{7}$. Il quadrato di questa frazione dovrebbe essere equivalente a $\frac{19}{48}$; e per conseguenza dovrebbe essere il quadi 5 eguale a 19. ed il quadrato di 7 eguale a 48; il che non può sussistere, perchè si è supposto che i termini della frazione proposta non erano quadrati perfetti; dunque la radice quadrata di questa frazione è un numero incommensurabile.

370. Abbenchè non si possa esprimere esattamente in numeri fratti la radice di un numero, che non è quadrato perfetto; non si deve perciò dedurne che questa radice sia assolutamente indeterminata. Per l' opposto, essa è una quantità determinata, perchè si può esprimerla con numeri fratti, che differiscano dal suo valore di una quantità tanto piccola, quanto si vuole, come si vedrà da ciò che segue.

ARTICOLO I.

Estrazione della radice quadrata di un numero intero per approssimazione.

371. Vedemmo (n.° 158) che quando un numero intero non è quadrato perfetto, si poteva ottenere la radice quadrata approssimata di questo numero, che differisce dalla vera per meno di una unità. Ma quando si vuol spingere l'approssimazione tanto, quanto si vuole, allora bisognerà operare come segue.

Supponiamo, per esempio, che si debba estrarre la radice quadrata di 7 approssimata per meno di $\frac{1}{5}$. È chiaro che moltiplicando 7 per 25, quadrato di 5, e dividendo il prodotto per lo stesso 25, si trasformerà l' intero 7 nel fratto equivalente $\frac{175}{25}$.

Ma la radice quadrata di 175 è compresa fra 13 e 14, dunque $\frac{175}{25}$ dev' esser compreso fra $\frac{13^2}{25}$ e $\frac{14^2}{25}$; e per conseguenza $\frac{13}{5}$, o $2\frac{3}{5}$ sarà la radice quadrata di 7, che differirà dalla radice esatta per meno di $\frac{1}{5}$. Da ciò si conchiude che

Per estrarre la radice quadrata di un numero intero, approssimata per meno di una unità frazionaria data, bisogna moltiplicare il numero proposto pel quadrato del denominatore di questa unità frazionaria, estrarre la radice quadrata del prodotto approssimata per meno di una unità, e dividere questa radice pel denominatore della unità frazionaria proposta.

372. Dalle cose precedenti apparisce che se si voglia estrarre la radice quadrata di un numero intero, approssimata per meno di $\frac{1}{10}$, di $\frac{1}{100}$, di $\frac{1}{1000}$, ecc..., si dovrà moltiplicare questo numero pel quadrato di 10, di 100, di 1000, ecc., il che si riduce a scrivere due, quattro, sei. ecc. zeri a destra del numero accennato, estrarre dal prodotto la radice quadrata approssimata per meno di una unità, e dividere questa radice per 10, 100, 1000, ecc.. Infatti, supponiamo che si debba estrarre la radice quadrata di 7 approssimata per meno di $\frac{1}{10}$. Siccome 7 equivale a $\frac{700}{100}$, così si dovrà estrarre la radice quadrata di 700, approssimata per meno di una unità, e si avrà il numero 26: dividendo questo numero per 10, s'avrà 2, 6, che sarà la radice approssimata di 7 per meno di $\frac{1}{10}$.
Quindi si conchiude che

Per estrarre la radice quadrata di un numero intero, approssimata per meno di una unità decimale data, bisogna mettere alla destra di questo numero tante coppie di zeri, quante sono le cifre decimali. che si vogliono avere nella radice, estrarre dal numero. che risulta. la radice approssimata per meno di una unità, e separare a destra di questa radice tante cifre, quante sono le coppie de' zeri adoperati.

ARTICOLO II.

Estrazione della radice quadrata approssimata da un numero fratto.

373. Abbiam veduto (n.° 298) che quando ambidue i termini di una frazione sono quadrati perfetti, si ha la radice quadrata di questa frazione con estrarre la radice medesima tanto dal numeratore, quanto dal denominatore. Resta ora a considerare gli altri casi, che possono accadere.

374. Supponiamo che si debba estrarre la radice quadrata da $\frac{7}{25}$, in cui il solo denominatore è un quadrato perfetto. Essendo 7 compreso fra 4 e 9, cioè fra i quadrati di 2 e di 3, la frazione proposta sarà compresa fra $\frac{4}{25}$ e $\frac{9}{25}$; e per conseguenza la sua radice quadrata sarà compresa fra $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{5}$. Dunque, se si prenda $\frac{2}{5}$, questa sarà la radice quadrata di $\frac{7}{25}$ approssimata per meno di $\frac{1}{5}$.
Da ciò si conchiude che

Per estrarre la radice quadrata di una frazione, in cui il solo denominatore è un quadrato perfetto, bisogna estrarre la radice

del numeratore approssimata per meno di una unità, e dividere questa radice per quella del denominatore.

375. Se ambidue i termini della frazione non sono quadrati perfetti, o il solo denominatore non è quadrato perfetto, è chiaro che questi due casi si riducono al precedente con moltiplicare i due termini della frazione proposta pel suo denominatore. S'avrà allora la radice quadrata di questa frazione approssimata per meno di una unità frazionaria, che sarà indicata dal suo denominatore.

Sia, per esempio, da estrarsi la radice quadrata da $\frac{3}{7}$, si cangerebbe questa frazione nella frazione equivalente $\frac{21}{49}$, moltiplicando i suoi due termini pel denominatore 7; ma la radice di 21 cade tra 4 e 5, dunque $\frac{4}{7}$ è la radice di $\frac{3}{7}$ approssimata per meno di $\frac{1}{7}$.

La radice di $\frac{3}{7}$ si trova maggiore di questa frazione per le ragioni addotte (n.° 302).

376. Giova osservare che se in vece del denominatore si rendesse il numeratore un quadrato perfetto, si dovrebbe fare una sola estrazione di radice come avviene quando si rende il denominatore un quadrato perfetto; se non che non si potrebbe più valutare immediatamente il grado dell'approssimazione, che si ottiene. Così, se si trasformasse $\frac{3}{7}$ in $\frac{9}{21}$, la radice di $\frac{3}{7}$ sarebbe compresa tra $\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{5}$, e però se si prenda $\frac{3}{4}$ pel valore approssimato della radice accennata, non si potrà valutare l'errore immediatamente, il quale è al di sotto della differenza delle due frazioni $\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{5}$, vale a dire al di sotto di $\frac{3}{20}$; il che non si può vedere senza fare la sottrazione delle due frazioni accennate.

377. Abbiam veduto (n.° 266) che una frazione si può trasformare in un'altra, che abbia un dato denominatore. Se dunque si volesse trovare la radice di $\frac{3}{7}$ con un più alto grado di approssimazione; di guisa che differisse dalla vera per meno di $\frac{1}{15}$, per esempio, allora si dovrebbe trasformare la frazione $\frac{3}{7}$ in un'altra che avesse per denominatore il quadrato di 15, che è 225. Applicando la regola (n.° 266) s'avrà la frazione $\frac{96}{225}$, la quale differisce da $\frac{3}{7}$ per meno di $\frac{1}{225}$. Or la radice di 96 cade tra 9 e 10,

dunque $\frac{2}{15}$ è la radice di $\frac{3}{7}$ approssimata per meno di $\frac{1}{15}$.

Da ciò si conchiude che

Per estrarre la radice quadrata di una frazione approssimata per meno di una unità frazionaria data, bisogna moltiplicare questa frazione pel quadrato del denominatore dell' unità frazionaria data, estrarre dal prodotto la radice quadrata approssimata per meno di una unità, vale a dire estrarre dal più grande numero intero contenuto in detto prodotto la radice quadrata approssimata per meno di una unità; e dividere infine questa radice pel denominatore dell' unità frazionaria data.

378. Se si volessero adoperare i decimali per avere le radici quadrate approssimate delle frazioni, allora si dovrebbe operare come segue. Supponiamo, per esempio, che si debba trovare la radice quadrata di $\frac{3}{7}$ con tre cifre decimali. Si trasformerà $\frac{3}{7}$ nella frazione equivalente $\frac{21}{49}$, poi si troverà la radice di 21 con tre cifre decimali colla regola data (n.° 372), e s' avrà 4,583. Dividendo questa radice per 7, che è la radice di 49, s' avrà la radice richiesta 0,654.

379. Si potrebbe ancora operare in un altro modo, che riducesi alla regola data più sopra (n.° 378), vale a dire a trasformare la frazione $\frac{3}{7}$ in una frazione decimale, che avesse per denominatore il quadrato di 1000, o in altri termini a trasformare la frazione $\frac{3}{7}$ in un' altra, che avesse 6 cifre decimali. Estraendo da questa la radice quadrata con la regola data (n.° 331), s' avrà la radice richiesta. Dunque

Per estrarre da una frazione ordinaria la radice quadrata approssimata per meno di una unità decimale data, bisogna trasformare questa frazione in una frazione decimale, che abbia tante coppie di cifre decimali, quante sono le cifre decimali, che si vogliono ottenere nella radice. La radice quadrata della frazione decimale accennata sarà la radice richiesta.

380. La regola precedente si applicherebbe anche quando la frazione proposta fosse decimale. Supponiamo, per esempio, che si debba determinare la radice quadrata di 2, 5 approssimata per meno di $\frac{1}{100}$. Si trasformerà la frazione proposta in un' altra, che abbia quattro cifre decimali, e s' avrà 2,5000. La radice quadrata approssimata di questo numero essendo 158, ne segue che la radice richiesta è 1,58.

CAPITOLO II.

DE' NUMERI INCOMMENSURABILI, CHE PROVENGONO DALLA ESTRAZIONE DELLE RADICI CUBICHE.

381. *Se un numero non è cubo perfetto, la sua radice cubica sarà un numero incommensurabile.*

La dimostrazione di questa proposizione è come quella fatta pel quadrato (n.° 367).

382. *La radice cubica di una frazione irreducibile, i cui termini non sono cubi perfetti, è un numero incommensurabile.*

La dimostrazione di questa proposizione è come quella fatta per la radice quadrata (n.° 369).

ARTICOLO I.

Estrazione della radice cubica approssimata da un numero intero.

383. Supponiamo, per esempio, che si debba estrarre la radice cubica di 22 approssimata per meno di $\frac{1}{5}$. Siccome il cubo di 5 è 125, così si trasformerà l' intero 22 in un fratto equivalente, che abbia per denominatore 125, e s' avrà $\frac{2750}{125}$. Or la radice cubica di 2750 è compresa fra 13 e 14, dunque $\frac{13}{5}$, ovvero $2\frac{3}{5}$ è la radice cubica di 22 approssimata per meno di $\frac{1}{5}$. Dunque

Per estrarre la radice cubica da un numero intero approssimata per meno di una unità frazionaria data, bisogna moltiplicare questo numero pel cubo del denominatore di questa unità frazionaria, estrarre dal prodotto la radice cubica approssimata per meno di una unità, e dividere questa radice pel denominatore della frazione proposta.

384. Da ciò si deduce che per estrarre la radice cubica di un numero intero approssimata per meno di una unità decimale data, bisogna scrivere alla sua destra tanti zeri, quanto è il triplo del numero delle cifre decimali, che si vogliono nella sua radice. In seguito si estrarrà dal risultato la radice cubica approssimata per meno di una unità, ed a destra di questa radice si separeranno tante cifre decimali, quante ne sono state richieste.

Sia, per esempio, da estrarsi la radice cubica dal numero 327 approssimata per meno di un centesimo. Messi 6 zeri appresso a questo numero, il risultato sarà 327000000, la cui radice cubica approssimata per meno di una unità è 688; per conseguenza la radice cubica richiesta sarà 6,88.

ARTICOLO II.

Estrazione della radice cubica approssimata da un numero fratto.

385. Abbiam veduto (n.° 298) che quando ambidue i termini di una frazione sono cubi perfetti, s'ottiene la radice cubica di questa frazione con estrarre la radice cubica tanto dal numeratore, quanto dal denominatore. Rimane ora a considerare gli altri casi che possono darsi.

386. Supponiamo, per esempio, che si debba estrarre la radice cubica dalla frazione $\frac{12}{125}$, in cui il solo denominatore è un cubo perfetto. Siccome la radice cubica di 12 cade fra 2 e 3, così la radice cubica della frazione proposta dovrà cadere fra $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{5}$; e per conseguenza $\frac{2}{5}$ è la radice cubica della frazione accennata, approssimata per meno di $\frac{1}{5}$. Dunque

Per estrarre la radice cubica da una frazione, in cui il solo denominatore è un cubo perfetto, bisogna estrarre la radice cubica dal numeratore, approssimata per meno di una unità, e dividere questa radice per quella del denominatore.

387. Se ambidue i termini di una frazione non sono cubi perfetti, o se il solo denominatore non è cubo perfetto, è evidente che si ridurranno questi due casi al precedente con moltiplicare i due termini di essa frazione pel quadrato del suo denominatore; ed allora s'avrà la radice cubica richiesta approssimata per meno di una unità frazionaria indicata dal denominatore medesimo

Sia, per esempio, da estrarsi la radice cubica da $\frac{3}{5}$. Moltiplicando i due termini di questa frazione per 25, quadrato del denominatore, s'avrà la frazione equivalente $\frac{75}{125}$. Or la radice cubica di 75 è compresa fra 4 e 5, dunque la radice cubica di $\frac{3}{5}$ è $\frac{4}{5}$, approssimata per meno di $\frac{1}{5}$. E qui s'osservi che la radice cubica di $\frac{3}{5}$ si trova maggiore di questa frazione per le ragioni addotte (n.° 302).

388. Si potrebbe avere una maggiore approssimazione con trasformare la frazione proposta in un' altra di un dato denominatore. Supponiamo, per esempio, che si volesse la radice cubica di $\frac{3}{5}$ approssimata per meno di $\frac{1}{7}$: si trasformerebbe $\frac{3}{5}$ in una frazione, che avesse per denominatore il cubo di 7, cioè 343. Appli-

cando la regola data (n.° 266), s' avrà la frazione $\frac{205}{343}$. Or la radice cubica di 205 cade fra 5 e 6, dunque $\frac{5}{7}$ è la radice cubica di $\frac{3}{5}$, approssimata per meno di $\frac{1}{7}$. Dunque

Per estrarre la radice cubica da una frazione, approssimata per meno di una unità frazionaria data, bisogna moltiplicare questa frazione pel cubo del denominatore di questa unità frazionaria, estrarre dal più grande numero intero contenuto nel prodotto la radice cubica approssimata per meno di una unità, e dividerr questa radice pel denominatore dell' unità frazionaria data.

389. Ordinariamente si adoperano i decimali per avere le radici approssimate de' numeri. Supponiamo, per esempio, che si debba estrarre la radice cubica da $\frac{3}{5}$ approssimata sino ai centesimi. Moltiplicando ambidue i termini della frazione per 25, quadrato del denominatore, s'avrà la frazione equivalente $\frac{75}{125}$. Estraendo la radice cubica di 75 con due cifre decimali nel modo detto più sopra (n° 331), e dividendo poi questa radice per 5, s' avrà la radice richiesta.

390. Si potrebbe ancora trasformare la frazione proposta $\frac{3}{5}$ in una frazione decimale, che avesse tante cifre decimali, quanto è il triplo di quelle, che si vogliono avere nella radice. Così, se si vuole la radice cubica di $\frac{3}{5}$ approssimata per meno di $\frac{1}{10}$, si dovrà ridurre questa frazione in decimali sino alla cifra de' millesimi; il che darà 0.600. Estraendo la radice cubica di questa frazione si troverà che 0,8 è la radice richiesta. Dunque

Per estrarre la radice cubica di una frazione ordinaria, approssimata per meno di una unità decimale data, bisogna trasformare questa frazione in una frazione decimale, che abbia tante cifre decimali, quanto è il triplo di quelle, che si vogliono avere nella radice. La radice cubica della frazione decimale accennata sarà la radice richiesta.

391. La regola precedente si applica anche quando la frazione proposta fosse decimale. Supponiamo, per esempio, che si debba estrarre la radice cubica di 12,5 approssimata per meno di $\frac{1}{100}$; si trasformerà questa frazione in un' altra, che abbia 6 cifre decimali; il che darà la frazione decimale 12,500000. Or la radice cubica di questo numero approssimata per meno di una unità è 232, dunque la radice richiesta è 2,32.

CAPITOLO III.

OSSERVAZIONI SUL CALCOLO DE' NUMERI INCOMMENSURABILI.

392. Abbiam veduto ne' due capitoli precedenti che quando un numero non è quadrato, o cubo perfetto, la sua radice quadrata, o cubica, è un numero incommensurabile. Inoltre, abbiam veduto che non è possibile esprimere esattamente questo numero in frazioni, ma che possiamo solamente approssimarci al suo valore tanto, quanto si vuole. Sotto questo punto di vista l'operazione è sempre possibile, e conduce sempre ad un risultato determinato.

393. Quando il valore approssimato di un numero incommensurabile è espresso da una frazione decimale, si possono prendere tante cifre decimali, quanto è il grado d'approssimazione, che si desidera, trascurando tutte le altre Per esempio, la radice quadrata di 8 è espressa dal numero decimale 2,82842712.... . Prendendo 2,8 in luogo della radice accennata si commette un errore, che è al di sotto di un *decimo;* prendendo 2,82, l'errore sarà al di sotto di un *centesimo*. ecc.. È raro che si faccia uso di più di sei o sette cifre decimali. Ma se si volesse che l'errore fosse al di sotto di una mezza unità di un ordine decimale dato, allora bisognerebbe ricorrere alla regola seguente, la quale si applica anche quando la frazione decimale è terminata, vale a dire quando è l'espressione esatta di un numero commensurabile.

394. *Per approssimarsi al valore di un numero decimale per meno di una mezza unità di un ordine decimale dato, bisogna sopprimere tutte le cifre, che seguono quella dell'ordine accennato, badando di accrescere di una unità l'ultima cifra conservata, quando la prima delle cifre, che si trascurano, sorpassa 5, o è un 5 seguito da altre cifre.*

Supponiamo, per fissare le idee, che s'abbia il numero decimale 2 825...., e che si voglia il valore approssimato di questa frazione per meno di *un mezzo centesimo*. È chiaro che la cifra 5 è una mezza unità dell'ordine contiguo a sinistra. perchè *cinque millesimi* equivalgono ad *un mezzo centesimo*. Se dunque si prende 2,82 in luogo di 2,825, e si suppone che la cifra 5 non sia seguita da altre cifre significative, si commetterà l'errore di *un mezzo centesimo*. L'errore sarebbe lo stesso, ma in più, se si prendesse 2,83. Supponiamo ora che la cifra 5 sia seguita da altre cifre significative; in tal caso è manifesto che prendendo 2,83 in luogo di 2,825, si commetterà un errore, che sarà al di sotto di *un mezzo centesimo,* perchè l'unità aggiunta alla cifra 2 equivale a 10 millesimi, e la parte trascurata sorpassa 5 millesimi.

Da ciò segue che se il numero decimale proposto fosse 2,823, e si volesse un valore approssimato di questo numero che fosse al di sotto di *un mezzo centesimo*, basterebbe scrivere 2,82.

Per l'opposto, se il numero proposto fosse 2,827, scrivendo

2,82, l'errore sarebbe più grande di *un mezzo centesimo;* scrivendo poi 2,83, l'errore sarebbe al di sotto di *un mezzo centesimo*, perchè 7 millesimi è maggiore di un mezzo centesimo, e l'unità aggiunta alla cifra 2 è maggiore di 7 millesimi. o del numero, che risulterebbe, quando la cifra 7 fosse seguita da altre cifre significative. Quindi la regola enunciata rimane dimostrata.

395. Dalle cose dette ne' due capitoli precedenti apparisce che i valori approssimati di un numero incommensurabile possono essere espressi non solo per mezzo delle frazioni decimali, ma anche delle frazioni ordinarie. Resta a vedere se possono essere espressi da frazioni continue.

La regola data (n.° 350) per svolgere in frazione continua una frazione decimale, ridotta prima in frazione ordinaria, può applicarsi a qualsivoglia numero incommensurabile, purchè questo sia stato già espresso in decimali. Ma siccome il suo valore in decimali non può essere che approssimato, e che accrescendo di una unità l'ultima cifra decimale, si hanno due limiti, tra i quali si deve trovare il vero valore del numero incommensurabile proposto, ne consegue che a fine di non oltrepassare questi limiti, bisogna applicare la regola sopraddetta alle due frazioni, di cui è parola, e non ammettere poi nella frazione continua se non i quozienti, che egualmente si hanno dalle due operazioni.

Supponiamo. per esempio, che il valore approssimato di un numero incommensurabile sia espresso dal numero decimale

3,14159265355........... Se si prendesse la frazione 3,14159, si avrebbe la frazione $\frac{314159}{100000}$, la quale svolta in frazione continua darebbe i quozienti 3, 7, 15, 1, 25, 1, 7. 4. Questa frazione continua sarebbe esatta, se la frazione 3,14159 fosse terminata, vale a dire equivalente ad una frazione ordinaria data, da cui fosse stata ricavata; ma non lo può essere, quando la frazione 3,14159 rappresenta un valore approssimato di un numero incommensurabile, perchè il valor vero di questo numero è compreso fra le due frazioni $\frac{314159}{100000}$ e $\frac{314160}{100000}$. Infatti, svolgendo quest'ultima frazione in frazione continua si trovano i quozienti 3, 7, 16, ecc., e però si vede che il terzo quoziente è incerto. Da ciò segue che volendo estendere la frazione continua al di là di tre termini, bisogna prendere un valore approssimato del numero incommensurabile proposto, che abbia più di sei cifre.

Operando, per esempio, sulla frazione $\frac{314159265}{100000000}$ s'avranno i quozienti 3, 7, 15. 1, 299, ecc...

Dal che si conchiude che i soli quattro primi quozienti sono esatti, ovvero che le cifre trascurate nel numero decimale dato non hanno alcuna influenza sulle prime quattro ridotte, che sono

$$\frac{1}{3}, \frac{22}{7}, \frac{333}{105}, \frac{355}{113}.$$

396. Riflettendo a ciò che fin qui è stato esposto divien manifesto che un numero incommensurabile si può considerare come il limite di una frazione decimale, o di una frazione continua, che non hanno termine; nello stesso modo che l'unità è il limite della frazione decimale periodica 0,9999... Infatti, questa frazione nella sua totalità è uguale a $\frac{9}{9}$, ossia 1.

Sotto questo punto di vista si possono facilmente comprendere le operazioni del calcolo de' numeri incommensurabili. Ma sebbene l'idea di limite sia resa chiara dalle cose sopraddette, nondimeno stimiamo opportuno di dare una definizione rigorosa della parola *limite*, perchè da questa si ricava un principio, che servo di base al calcolo degl'incommensurabili.

397. *Una quantità, che non varia, si dice esser limite di una quantità variabile, quanto questa si può avvicinare alla prima indefinitamente, vale a dire di modo che la loro differenza possa divenire minore di qualsivoglia quantità data, senza che possa nondimeno ridursi mai rigorosamente a zero.*

398. Da questa definizione si deduce immediatamente che

Se due quantità variabili restano sempre eguali tra loro, in tutti gli stati di grandezza per i quali passano, i loro limiti saranno eguali.

Infatti, è evidente che una stessa quantità non può tendere nel tempo stesso verso due limiti disuguali.

399. Possiamo ora formarci una idea chiara del calcolo de' numeri incommensurabili. Infatti, si può trovar sempre un numero commensurabile, che differisca tanto quanto si vuole da un numero incommensurabile dato; per conseguenza la somma o la differenza di due numeri incommensurabili dati si può considerare come il limite della somma o della differenza di due numeri commensurabili, che si approssimano indefinitamente ai numeri incommensurabili dati. Similmente, si deve considerare un prodotto di fattori incommensurabili come il limite, cui tendono i prodotti, che si ottengono quando in luogo de' fattori incommensurabili si mettono de' fattori commensurabili, che vi s' avvicinano indefinitamente. Da ciò segue che *invertendo l' ordine de' fattori incommensurabili, il prodotto non resta alterato.*

Infatti, i prodotti successivi de' fattori commensurabili non cambiano, qualunque sia l' ordine di questi fattori; dunque deve succedere lo stesso del prodotto de' fattori incommensurabili proposti, perchè i limiti di due quantità eguali sono eguali fra loro.

La divisione de' numeri incommensurabili si concepisce ora facilmente, perchè questa operazione consiste a trovare un fattore quando è dato il prodotto e l'altro fattore. Dicasi lo stesso dell'elevazione a potenza e dell' estrazione di radice da un numero incommensurabile.

400. Le cose esposte bastano a far concepire il significato delle operazioni del calcolo, quando si applicano ai numeri incommensurabili, ma non danno le regole effettive di questo calcolo. Per

aver queste regole bisognerebbe operare propriamente sui numeri incommensurabili, e non già sui loro valori approssimati. Per comprender ciò chiaramente bisogna ricordarsi che quando si vuole indicare, per esempio, che da un numero si vuole estrarre la radice quadrata, si adopera il segno $\sqrt{\ }$. Quando il numero proposto è quadrato perfetto, s'effettua l'operazione, e non è necessario di conservare il radicale. Ma se non è quadrato perfetto, e che sia, per esempio, il numero 8, allora bisogna conservare il radicale, e scrivere $\sqrt{8}$, se si vuole avere l'esatta espressione del numero incommensurabile, che proviene dalla estrazione della radice quadrata di 8. Il segno accennato definisce rigorosamente un tal numero; il che non si può ottenere per mezzo de' suoi valori approssimati 2,8, 2,82, 2828, ecc...

Quindi si vede che il segno radicale, il quale in origine non era che l'indice di una operazione da farsi sui numeri, viene ad incorporarsi con l'espressione medesima di questi numeri, allorchè sono incommensurabili.

401. Da ciò segue che il calcolo effettivo de' numeri incommensurabili si fa con conservare nel corso di esso calcolo l'espressione semplice e rigorosa de' numeri accennati, vale a dire si fa con operare sui radicali, rimettendo alla fine del calcolo medesimo l'operazione, che consiste a dedurre da questa espressione rigorosa un valore numerico approssimato tanto quanto si voglia. Questa stessa approssimazione può talvolta essere risparmiata; e ciò avviene allorchè il calcolo de' numeri incommensurabili conduce a risultati commensurabili. Ma queste cose non possono essere espresse in modo compiuto senza il soccorso dell' Algebra, per cui si rimette a questa scienza il calcolo effettivo de' numeri incommensurabili, ossia il calcolo de' radicali.

LIBRO QUARTO

RAGIONI, E PROPORZIONI.

402. Ne' tre libri precedenti abbiam parlato de' numeri interi, de' numeri fratti, e de' numeri incommensurabili: resta ora a paragonarli fra loro. Siffatto paragone farà vedere la possibilità di riunire in un solo concetto le tre specie di numeri, di cui è parola.

CAPITOLO I.

DELLA RAGIONE, E DELLA PROPORZIONE ARITMETICA.

403. Quando si paragonano due grandezze l'una all' altra, rispetto alla loro quantità, è chiaro che due soli casi possono accadere, cioè possono essere o eguali, o diseguali. In questo secondo caso, una delle due sarà la maggiore; e però la loro disuguaglianza si può considerare sotto un doppio aspetto, vale a dire si può cercare *di quanto* l' una sorpassa l' altra, o pure *quante volte* l' una contiene l' altra.

I risultamenti di questi due paragoni si dicono *ragioni* o *rapporti*; ed in particolare si dà al primo il nome di *ragione* o *rapporto aritmetico*, ed al secondo quello di *ragione* o *rapporto geometrico*.

404. È manifesto che le due grandezze, che si paragonano fra loro, devono essere *omogenee*, cioè della stessa specie o natura, perchè altrimenti nulla si potrebbe determinare rispetto alla loro eguaglianza e diseguaglianza. Infatti, sarebbe assurdo il chiedere se quattro canne e tre ducati sono eguali o diseguali.

ARTICOLO I.

Della ragione aritmetica, o della differenza tra due numeri.

405. Quando sono dati due numeri, e si cerca di quanto l' uno sorpassa l' altro, si soddisfà a questa quistione con determinare la

ragione aritmetica di questi due numeri. E poichè siffatta determinazione s' effettua con trovare la differenza dei due numeri proposti, ne segue che

La ragione aritmetica di due numeri non è altro che la differenza di questi numeri.

Così, la ragione aritmetica di 15 a 7 è 15 — 7, ovvero 8. Il primo termine dicesi *antecedente*, ed il secondo *conseguente*. Il risultato del paragone costituisce propriamente la ragione aritmetica, che sarebbe meglio chiamare semplicemente *differenza*, riserbando il nome di *ragione* esclusivamente per la ragione geometrica.

ARTICOLO II.

Della proporzione aritmetica, o dell' equidifferenza.

406. Si dice *proporzione aritmetica* o *equidifferenza*, l' eguaglianza di due ragioni aritmetiche, o di due differenze.

Così, essendo la differeza 12 — 8 eguale alla differenza 7 — 3, si ha l' equidifferenza

$$12 - 8 = 7 - 3.$$

Questa si suole scrivere ancora come segue

$$12 \cdot 8 : 7 \cdot 3,$$

mettendo un punto in luogo del segno —, e due punti in vece del segno =, ed allora si legge: 12 *sta a* 8 *come* 7 *sta a* 3.

407. Nell' equidifferenza il primo ed il terzo termine si chiamano *antecedenti*, il secondo ed ultimo *conseguenti*. Il primo ed il quarto termine si dicono *termini estremi*, il secondo ed il terzo *termini medj*.

408. *In ogni equidifferenza la somma de' termini estremi è uguale a quella de' medj.*

Sia l' equidifferenza 12 · 8 : 7 · 3. Essendo 4 la differenza di 12 e 8, sarà 12 = 8 + 4: similmente, essendo 4 la differenza di 7 e 3, sarà 7 = 3 + 4. Se dunque in luogo di 12 si mette 8 + 4, ed in luogo di 7 si mette 3 + 4, l' equidifferenza proposta diverrà

$$8 + 4 \cdot 8 : 3 + 4 \cdot 3,$$

e sarà evidente che la somma de' termini estremi è uguale a quella de' termini medj.

409. La dimostrazione precedente può applicarsi anche quando l' equidifferenza fosse scritta come segue

$$8 \cdot 12 : 3 \cdot 7;$$

perocchè consistendo la ragione aritmetica nella differenza de' due numeri, che si paragonano, ne segue che *la ragione aritmetica è l' eccesso dell' antecedente sul conseguente, o del conseguente sull' antecedente, secondo che questo sarà maggiore o minore dell' altro.*

410. L'equidifferenza si dice *continua*, quando i termini medj sono eguali. Tale è l'equidifferenza 6 · 9 : 9 · 12. E poichè in tal caso l'equidifferenza contiene propriamente tre termini, così si suole scrivere come segue

$$\div\ 6 \cdot 9 \cdot 12, \text{ e si legge } 6 \textit{ sta a } 9 \textit{ come } 9 \textit{ sta a } 12.$$

Bisogna ancora avvertire che l'ultimo termine della proporzione non continua, o *discreta*, dicesi *quarto proporzionale aritmetico*, e l'ultimo termine della continua *terzo proporzionale aritmetico*. Il termine di mezzo poi, che si ripete, chiamasi *medio proporzionale aritmetico*. Finalmente, applicando la dimostrazione fatta più sopra alla equidifferenza continua si deduce che

Nella equidifferenza continua la somma de' termini estremi è uguale al doppio del termine medio.

411. Essendo nella equidifferenza discreta la somma de' termini estremi eguale a quella de' medj, ne segue che si può trovare un termine di una equidifferenza discreta, quando sono dati gli altri tre. Quindi si vede facilmente che

Per trovare un termine estremo bisogna sottrarre l'estremo cognito dalla somma de' due medj; *e che per trovare un termine medio*, *bisogna sottrarre il medio cognito dalla somma de' due estremi*.

412. Nell'equidifferenza continua essendo la somma de' termini estremi eguale al doppio del termine medio, ne segue che

Per trovare un termine estremo bisogna sottrarre l'estremo cognito dal doppio del termine medio; e che per trovare il termine medio bisogna prendere la metà della somma de' due estremi.

Supponiamo, per esempio, che si debba trovare il medio proporzionale aritmetico tra i numeri 10 e 6; si prenderà la metà della somma di questi due numeri, e s'avrà 8, che sarà il medio proporzionale richiesto. Infatti, 10 · 8 : 8 · 6.

CAPITOLO II.

DELLA RAGIONE, E DELLA PROPORZIONE GEOMETRICA.

413. I nomi di *ragione* o *rapporto geometrico*, e di *proporzione geometrica* furono dati dagli antichi Aritmetici alla ragione e proporzione, di cui andiamo a parlare, perchè nella Geometria, cioè nella scienza della quantità continua, si fa quasi un uso esclusivo di esse. Nondimeno queste denominazioni sono difettose, come quelle di *ragione* o *rapporto aritmetico*, e di *proporzione aritmetica*, perchè l'una e l'altra specie di ragione, l'una e l'altra specie di proporzione si adoperano tanto nell'Aritmetica, quanto nella Geometria. Quindi alcuni Matematici moderni volendo far corrispondere il linguaggio alle idee, che rappresenta, hanno dato alla ragione aritmetica il nome di *ragione o rapporto per differenza*, e alla ragione geometrica quello di *ragione o rapporto per*

quoziente; per conseguenza chiamano *equidifferenza* la proporzione aritmetica, e *proporzione per quoziente* la proporzione geometrica. Ma altri Matematici hanno stimato di dare il nome di *ragione* o *rapporto* esclusivamente alla sola ragione geometrica, chiamando semplicemente *differenza* la ragione aritmetica. Quindi danno il nome di proporzione alla sola proporzione geometrica, e d'equidifferenza alla proporzione aritmetica. Questa maniera di vedere ci sembra esser la migliore (f).

ARTICOLO I.

Della ragione geometrica, o della ragione propriamente detta.

414. Dalle cose dette più sopra (n.° 403) apparisce che

La ragione geometrica, *o semplicemente la* ragione o rapporto *di due numeri è il quoziente, che risulta dividendo uno di questi numeri per l' altro.*

Il primo numero dicesi *antecedente*, il secondo *conseguente;* e però si potrebbe dire che la ragione è il quoziente, che si ottiene dividendo l' antecedente pel conseguente. Così, la ragione di 20 a 5 è 4, perchè 20 diviso per 5 dà il quoziente 4. Viceversa, la ragione di 5 a 20 è $\frac{1}{4}$, perchè $\frac{5}{20}$ equivale a $\frac{1}{4}$.

Il rapporto di due numeri s' indica mettendo due punti, o una linea fra l' antecedente ed il conseguente. Quindi il rapporto di 20 a 5 s' indica scrivendo 20 : 5, ò pure $\frac{20}{5}$.

415. *Una ragione non resta alterata, quando si moltiplicano, o si dividano i suoi termini per uno stesso numero.*

Infatti, una ragione equivale ad una frazione, ed è noto che una frazione non cambia valore, quando i termini di essa si moltiplicano, o si dividano per uno stesso numero

Così, la ragione di 30 a 6 è la stessa che quella di 60 a 12, di 15 a 3, di 5 a 1.

416. *La ragione di due numeri combinati con frazioni si può sempre ridurre a quella di due numeri interi.*

Sia, per esempio, da esprimersi in numeri interi il rapporto di 20 a $\frac{5}{7}$. Riducendo l' intero 20 ad un rotto, che abbia per denominatore 7, il rapporto accennato sarà eguale a quello di $\frac{140}{7}$: $\frac{5}{7}$, ovvero a quello di 140 a 5 (n.° 291), o in fine a quello di 28 a 1.

Se il rapporto dato fosse di una frazione ad un' altra, si ridurrebbe a quello di due numeri interi riducendo le due frazioni allo stesso denominatore.

(f). Eulero fu primo a dinotare la ragione aritmetica col semplice nome di *differenza*. Lagrange accolse questa idea di Eulero, ed estese la riforma della nomenclatura alla proporzione aritmetica, alla ragione geometrica, ed alla proporzione geometrica.

ARTICOLO II.

Della proporzione geometrica, o della proporzione propriamente detta.

417. La *proporzione geometrica*, o semplicemente la *proporzione* è l' eguaglianza di due ragioni. Quindi vi sono in una proporzione quattro termini, che portano gli stessi nomi che nella equidifferenza.

Per indicare l'eguaglianza di due ragioni si fa uso del segno $=$, o pure di quattro punti. Così, essendo la ragione di 12 a 4 eguale a quella di 6 a 2, questi quattro numeri formano una proporzione, che si scrive $12 : 4 :: 6 : 2$, o pure $12 : 4 = 6 : 2$. o in fine $\frac{12}{4} = \frac{6}{2}$. Ma qualunque di queste forme si adotti, si può sempre leggere dicendo 12 *sta a* 4 *come* 6 *sta a* 3.

418. Quando i termini medj sono eguali, la proporzione si dice *continua*.

Così, la proporzione $8 : 4 :: 4 : 2$ è una proporzione continua. E poichè la proporzione continua si compone propriamente di tre termini, perciò si suole scrivere anche come segue

$\div\div 8 : 4 : 2$, e si legge 8 *sta a* 4 *come* 4 *sta a* 2.

Quindi il secondo termine chiamasi *medio proporzionale*, e l' ultimo *terzo proporzienale*.

419. *In ogni proporzione il prodotto de' termini estremi è uguale a quello de' medj.*

Sia la proporzione $14 : 7 :: 8 : 4$. ovvero $\frac{14}{7} = \frac{8}{4}$. Riducendo questi due rotti allo stesso denominatore, il numeratore del primo rotto, che ne risulta, sarà 14×4, e quello del secondo 7×8. Ma quando due rotti sono eguali, ed hanno lo stesso denominatore, i loro numeratori devono essere eguali, dunque s' avrà

$$14 \times 4 = 7 \times 8.$$

Or 14 e 4 sono i termini estremi, e 7 e 8 i termini medj, dunque la proposizione enunciata è dimostrata.

420. Apparisce da questo teorema che

Si possono far subire ai termini di una proporzione tutti que' cambiamenti, che non alterano l' eguaglianza fra il prodotto degli estremi, e quello de' medj, mettere gli estremi al luogo de' medj, e viceversa; moltiplicare o dividere per un medesimo numero un estremo ed un medio.

421. Si deduce ancora dal teorema precedente che

Per trovare uno de' termini estremi di una proporzione, allorchè si conoscono gli altri tre, bisogna dividere il prodotto de' medj per l' estremo conosciuto; e che per trovare uno de' medj, bisogna dividere il prodotto degli estremi pel medio conosciuto.

La ragione di questa regola è chiara, perchè quando è dato il prodotto ed uno de' fattori, la divisione fa conoscere l' altro fattore.

Supponiamo, per esempio, che essendo 14, 7, e 8 i tre primi termini di una proporzione, si debba trovare il quarto proporzionale, che dinoteremo colla lettera x, s' avrà $14 : 7 :: 8 : x$; e però in virtù del teorema precedente sarà $14 \times x = 56$. Quindi è dato il prodotto 56 ed il fattore 14, onde l' altro fattore x sarà determinato con dividere 56 per 14; il che dà 4, dunque questo numero è il quarto proporzionale richiesto.

422. Essendo in ogni proporzione il prodotto de' termini estremi eguale a quello de' medj, ne segue che

Nella proporzione continua il prodotto de' termini estremi è uguale al quadrato del termine medio.

Se dunque sono dati due termini di una proporzione continua, e si vuol trovare in ordine a questi termini il terzo proporzionale, basterà dividere il quadrato del secondo termine pel primo termine. Così, volendosi trovare il terzo proporzionale in ordine ai due numeri 4 e 6, basterà dividere 36 per 4; il quoziente 9 sarà il terzo proporzionale richiesto.

Volendo poi trovare il medio proporzionale tra 4 e 9, basterà estrarre la radice quadrata dal prodotto 36 di questi numeri; il che dà 6 pel medio proporzionale richiesto.

423. *In ogni proporzione, la somma o la differenza de' due primi termini sta al secondo, come la somma o la differenza de' due ultimi termini sta al quarto.*

Sia la proporzione $12 : 8 :: 6 : 4$; dico che sarà

$$12 \pm 8 : 8 :: 6 \pm 4 : 4.$$

Infatti, se s' accresce o si diminuisce ciascuno antecedente del suo conseguente, i nuovi antecedenti conterranno i conseguenti primitivi una volta di più o di meno; e per conseguenza il primo di questi antecedenti conterrà tante volte il primo conseguente primitivo, quante il secondo antecedente contiene il secondo conseguente primitivo, onde la proposizione enunciata rimane dimostrata.

424. *In ogni proporzione la somma o la differenza de' due primi termini sta alla somma o alla differenza de' due ultimi come il primo sta al terzo, o come il secondo sta al quarto.*

Infatti, invertendo l' ordine de' medj nella proporzione ottenuta più sopra, si ha

$$12 \pm 8 : 6 \pm 4 :: 8 : 4,$$

o pure come $12 : 6$, perchè $8 : 4 :: 12 : 6$.

425. *In ogni proporzione, la somma de' due primi termini sta alla loro differenza come la somma de' due ultimi sta alla loro differenza.*

È una conseguenza immediata della proposizione precedente.
Infatti, si ha

$$12+8:6+4::8:4,$$

$$12-8:6-4::8:4.$$

Ma due ragioni eguali ad una terza sono eguali fra loro, dunque sarà

$$12+8:12-8::6+4:6-4.$$

426. *In ogni proporzione, la somma o la differenza degli antecedenti sta alla somma o alla differenza de' conseguenti come un antecedente sta al suo conseguente.*

Sia la proporzione $12:8::6:4$.

Invertendo l'ordine de' termini medj si ha $12:6::8:4$, e quindi in virtù della proposizione (n.° 424) s' avrà

$$12\pm6:8\pm4::12:8,\text{ o come }6:4.$$

427. *In una serie di rapporti eguali, la somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti i conseguenti come uno degli antecedenti sta al suo conseguente.*

Siano più rapporti eguali

$$10:5::8:4::6:3,\text{ ecc.}.$$

Per la proposizione precedente si ha

$$10+8:5+4::8:4.$$

Mettendo in luogo di $8:4$ il rapporto equivalente $6:3$, s' avrà

$$10+8:5+4::6:3;$$

ed in virtù della proposizione precedente risulterà

$$10+8+6:5+4+3::6:3,$$

il che dimostra il teorema enunciato.

428. *Se due proporzioni hanno gli stessi antecedenti, o gli stessi conseguenti, gli altri quattro termini rimanenti formeranno una proporzione.*

Siano le due proporzioni

$$20:10::8:4$$

$$30:10::12:4,$$

s' avrà

$$20:30::8:12.$$

Infatti, mutando l'ordine de' medj nelle due proporzioni proposte, s' avrà

$$20:8::10:4$$

$$30:12::10:4.$$

Ma due ragioni eguali ad una terza sono eguali fra loro, dunque sarà

$$20 : 8 :: 30 : 12,$$

ovvero

$$20 : 30 :: 8 : 12;$$

il che si doveva dimostrare.

ARTICOLO III.

Della ragione composta.

429. Una ragione si dice *composta* di due o di più ragioni, quando ha per antecedente il prodotto degli antecedenti di quelle ragioni, e per conseguente il prodotto de' conseguenti delle ragioni medesime.

430. *In ogni proporzione continua il primo termine sta al terzo come il quadrato del primo al quadrato del secondo, o come il quadrato del secondo al quadrato del terzo.*

Sia la proporzione continua ∺ 9 : 6 : 4. La ragione di 9 a 6 è $\frac{9}{6}$, quella di 6 a 4 è $\frac{6}{4}$. Moltiplicando fra loro queste due frazioni, il prodotto esprimerà la ragione composta della ragione di 9 a 6, e di 6 a 4. Ma il prodotto di $\frac{9}{6}$ per $\frac{6}{4}$ equivale a $\frac{9}{4}$, dunque la ragione di 9 a 4 si compone della ragione di 9 a 6, e di 6 a 4, o che vale lo stesso della ragione di 9 a 6, e della stessa ragione di 9 a 6; vale a dire che la ragione di 9 a 4 è uguale alla ragione di 81 : 36 : e però il teorema proposto rimane dimostrato.

431. *Se i termini di una proporzione si moltiplicano per i termini corrispondenti di un' altra, i quattro prodotti, che ne risultano, formeranno una nuova proporzione.*

Siano le due proporzioni

$$8 : 4 :: 6 : 3, \text{ e } 10 : 5 :: 14 : 7.$$

È chiaro che moltiplicando fra loro i termini corrispondenti di queste proporzioni, cioè 8 per 10, 4 per 5, 6 per 14, e 3 per 7, s'avranno due ragioni composte di ugual numero di ragioni eguali; e per conseguenza sarà

$$8 \times 10 : 4 \times 5 :: 6 \times 14 : 3 \times 7.$$

Se le proporzioni date fossero più di due, il teorema enunciato avrebbe anche luogo.

432. *Se quattro numeri formano una proporzione, i loro quadrati, o i loro cubi, formeranno pure una proporzione.*

Sia la proporzione 12 : 9 :: 4 : 3. È chiaro che se i termini di questa proporzione si moltiplicano per i termini corrispondenti di una o di due proporzioni identiche alla proposta, i prodotti risultanti saranno proporzionali, in virtù del teorema precedente. Ma questi prodotti sono i quadrati, o i cubi de' termini della proporzione data, dunque il teorema ennunciato rimane dimostrato.

433. *Se quattro numeri formano una proporzione, le loro radici quadrate o cubiche, formeranno ancora una proporzione.*
Sia la proporzione 8 : 4 :: 6 : 3; dico che sarà

$$\sqrt{8} : \sqrt{4} :: \sqrt{6} : \sqrt{3}.$$

Infatti, supponiamo che sia

$$\sqrt{8} : \sqrt{4} :: \sqrt{6} : \sqrt{2}.$$

Elevando a quadrato i termini di questa proporzione, s'avrà una nuova proporzione in virtù del teorema precedente. Ma il quadrato della radice quadrata di 8 è lo stesso che 8, quello della radice quadrata di 4 è 4, ecc..., dunque la nuova proporzione sarà

$$8 : 4 :: 6 : 2.$$

Or per ipotesi s' aveva

$$8 : 4 :: 6 : 3,$$

dunque sarebbe 2 eguale a 3; il che non può sussistere; e però il teorema proposto rimane dimostrato per le radici quadrate. Con lo stesso ragionamento si proverebbe per le radici cubiche.

CAPITOLO III.

OSSERVAZIONI SULLA TEORICA DELLE RAGIONI, E PROPORZIONI.

434. In ciò che segue intendiamo parlare delle ragioni e proporzioni propriamente dette, e non già delle differenze ed equidifferenze.

435. La teorica delle ragioni e proporzioni esposta nel capitolo precedente non sembra potersi applicare che ai numeri commensurabili: nondimeno essa si applica ancora ai numeri incommensurabili, perchè abbiam già veduto (n.° 399) in che consiste la divisione de' numeri incommensurabili. Quindi richiamando in questo luogo le cose dette nel numero citato si conchiude che

Il rapporto di due numeri incommensurabili è il limite, a cui tendono i rapporti successivi, che si ottengono mettendo in luogo de' numeri incommensurabili i loro valori commensurabili, che si approssimano ad essi numeri indefinitamente.

436. Da questa definizione si deduce che le proprietà dimostrate per i rapporti de' numeri commensurabili appartengono ancora ai rapporti de' numeri incommensurabili; perchè i limiti di due quantità eguali sono eguali fra loro.

437. Si è detto (n.° 9) che il *numero intero* è la collezione di più unità; e che (n.° 241) il *numero fratto* è quello che esprime una parte o una collezione di più parti dell' unità divisa in parti eguali. Finalmente (n.° 396) il *numero incommensurabile* è stato definito come il limite, a cui tendono i valori commensurabili, che possono ad esso approssimarsi per una quantità minore di qualsi-

voglia quantità data. Possiamo riunire queste tre definizioni in una sola, considerando un numero, qualunque esso sia, come un rapporto. Ma per arrivare a questo concetto bisogna premettere alcune considerazioni.

438. Non si può *misurare*, ossia determinare una quantità, se prima non si conosca un' altra quantità della stessa specie, ed il rapporto ch' esiste fra queste due quantità.

Se, per esempio, si dovesse determinare la quantità di un dato peso, bisognerebbe considerare come cognito un altro peso, come il rotolo, la libbra, o l' oncia; ed indicare quante volte il primo peso contiene il secondo.

Similmente, se si dovesse misurare una data lunghezza, bisognerebbe adoperare un' altra lunghezza cognita, come sarebbe la canna, il palmo, o il piede, ed indicare quante volte la prima lunghezza contiene la seconda. Dunque

Misurare una quantità significa trovare quante volte essa contiene un' altra quantità della stessa specie, che si prende ad arbitrio, o per convenzione, come unità di misura.

Un tal numero di unità costituisce la *misura* della quantità, e paragonando poi la quantità misurata a quella che la misura, il detto numero considerato *astrattamente* esprime il rapporto che passa tra quelle due quantità.

439. Dalle cose precedenti apparisce che si può definire il numero nel seguente modo:

Il numero è il rapporto di una quantità ad un' altra della stessa specie, che si prende come unità.

Sotto questo punto di vista un numero si dirà *intero*, quando potrà esser misurato dall' unità: si dirà *fratto*, quando potrà esser misurato da una parte aliquota dell' unità; e finalmente si dirà *incommensurabile*, quando non potrà esser misurato nè dall' unità, nè da una parte aliquota dell' unità, per quanto piccola si voglia.

440. Considerando i numeri come rapporti n' è nato che si sono chiamati *irrazionali* i numeri incommensurabili, e *razionali* i numeri commensurabili.

LIBRO QUINTO

APPLICAZIONE DELLE REGOLE DELL' ARITMETICA AI NUMERI CONCRETI.

441. I numeri sono stati considerati ne' quattro libri precedenti come *astratti*; bisogna ora considerarli come *concreti*, perchè così si presentano nelle applicazioni dell' Aritmetica ai bisogni della Società. Or ne' detti libri abbiamo esposto primieramente le operazioni del calcolo intorno alle diverse specie di numeri, cioè la somma, la sottrazione, la moltiplicazione, la divisione, l' elevazione a potenze, e l' estrazione delle radici: in seguito abbiam paragonato fra loro le diverse specie di numeri, ed abbiam svolta la teorica delle ragioni e proporzioni. Quindi volendo procedere con ordine seguiremo un cammino analogo in questo libro rispetto ai numeri concreti: e però faremo conoscere in primo luogo le operazioni del calcolo, che si possono fare sui numeri concreti, ed in secondo luogo applicheremo la teorica delle ragioni e proporzioni alla risoluzione de' ploblemi, che presentano i detti numeri. In somma ne' primi quattro libri si contiene l Aritmetica teoretica, nell' ultimo la sua applicazione alla pratica.

CAPITOLO I.

SISTEMA METRICO.

442. Dicemmo (n.° **10**) che s'appella numero *concreto* quello, che s' enuncia indicando la specie delle sue unità.

Quindi volendo applicare le regole de' numeri astratti ai numeri concreti, bisogna conoscere le diverse unita, di cui si fa uso nella Società, a fine di paragonarle fra loro, e valutare per mezzo di esse le quantità, sotto qualunque forma si presentino. Queste unità sono le *misure* in uso, le quali hanno variato con i tempi e con i luoghi; e non si è giunto a legarle insieme nel modo più semplice e regolare che ne' nostri giorni, come si vedrà appresso.

443. L' insieme delle diverse unità o misure, che servono a valutare le quantità di ogni specie, dicesi *sistema metrico*.

ARTICOLO I.

Antico sistema metrico napoletano.

444. In ogni sistema metrico le unità più importanti a conoscersi sono quelle di *lunghezza*, di *superficie*, di *capacità*, di *volume*, di *peso*, di *moneta*, di *tempo*.

445. *Misure di lunghezza*. Nell' antico sistema metrico napoletano l' unità di lunghezza, o *l' unità lineare*, si chiama *palmo*, il quale si divide in 12 *once*, e l' oncia in 5 *minuti*.

Una lunghezza di 8 palmi dicesi *canna*. La *pertica* è una lunghezza di 10 palmi, ed è in uso presso gli Architetti.

L' unità *itineraria*, o l' unità di lunghezza, che serve a misurare le grandi distanse, si chiama *miglio*, che si divide in 1000 *passi*, ed ogni passo equivale a 7 palmi. Quindi il miglio si compone di 7000 palmi.

446. *Misure di superficie*. Per formarsi l' idea esatta di queste misure s' immagini che il pavimento di una stanza sia perfettamente piano, e che la sua lunghezza sia eguale alla sua larghezza; allora in linguaggio geometrico si dice che la figura del pavimento è un *quadrato*. Quindi si dice *palmo quadrato* il quadrato, la cui lunghezza o larghezza equivale ad un *palmo lineare*. Similmente si dirà *canna quadrata* il quadrato, la cui lunghezza o larghezza equivale ad una *canna lineare*. Ciò premesso, l' unità di snperficie per le misure comuni è il palmo quadrato, o la canna quadrata.

L' unità di superficie per le *misure agrarie*, cioè quella che serve a misurare l' estensione de' terreni, si chiama *moggio*, il quale è un quadrato, che ha 30 *passi* di lunghezza e di larghezza, o pure è un quadrato, in cui ogni *lato* è lungo 30 *passi*. Ognuno di questi passi equivale a palmi $7\frac{1}{3}$; e per conseguenza il *passo agrario* è diverso dal *passo geografico*, che abbiam veduto più sopra esser eguale a 7 palmi.

Il moggio si divide ordinariamente in 10 *quarte*, la quarta in 9 *none*, la nona in 5 *quinte*.

447. *Misure di capacità*. Queste misure variano per i diversi liquidi.

L' unità di misura per l' olio si chiama *stajo*, che si divide in 16 *quarti*, ed ogni quarto in 6 *misurelli*. Lo stajo equivale ad un peso di rotola $10\frac{1}{3}$. Sedici staja formano la *salma*, che perciò equivale al peso di rotola $165\frac{1}{3}$.

L' unità di misura per l' acqua e pel vino è il *barile*, che contiene 60 *caraffe*. Dodici barili formano una *botte*, e due botti un *carro*. L' unità di misura per gli aridi, come grano, legumi, castagne, ecc., si chiama *tomolo*, che si divide in 4 *quarte*, ed ogni quarta in 6 *misure*; di modo che il tomolo contiene 24 misure.

448. *Misure di solidità*. Per ben comprendere questa specie di misure, bisogna sapere che in linguaggio geometrico si dà il nome di *parallelepipedo rettangolo* a quel *solido* o corpo, che è terminato da sei facce piane, come sarebbe uno di quei dadi, che servono a giuocare. Il parallelepipedo rettangolo prende il nome di *cubo*, quando le sei facce accennate sono tutte quadrate ed uguali fra loro. Quindi si dice *palmo cubo o cubico* il cubo, che ha per lato un palmo lineare: similmente si appella *canna cuba* o *cubica* il cubo, che ha per lato una canna lineare. Ciò premesso, l'unità di misura, che adoperano gli Architetti per valutare la solidità o volume di una fabbrica è un parallelepipedo rettangolo lungo 8 palmi, largo 8 palmi, ed alto 2 palmi. Questo parallelepipedo dicesi *canna di costumanza*.

L'unità di misura, che serve a valutare la quantità della legna da bruciare, è un parallelepipedo rettangolo lungo 8 palmi, largo 8 palmi, ed alto 4 palmi. Questo parallelepipedo si chiama *canna da legna*.

L'unità di misura per valutare i solidi di terra, i cavamenti ecc. è la canna cuba.

449. *Pesi*. L'unità di peso si chiama *rotolo*, che si divide in *once* 33 $\frac{1}{3}$. L'oncia si divide in 10 *dramme*, la dramma in 3 *scrupoli* o *trappesi*, il trappeso in 20 *acini* o *grani*. Quindi il rotolo equivale a 1000 *trappesi*.

Per alcuni generi si usa la *libbra*, che si compone di 12 once eguali a quelle del rotolo.

La calce si suol valutare con una unità chiamata *peso*, ed equivale a 40 rotola.

Per le grandi masse l'unità di peso è il *cantajo*, che si divide in 100 rotola.

Per valutare gli oggetti preziosi, come sarebbe il diamante, si divide l'oncia in 130 *carati*, il carato in 4 *grani*, il grano in 16 *sedicesimi*.

450. *Monete*. L'unità monetaria è il *ducato*, che si divide in 10 *carlini*, il carlino in 10 *grani*, il grano in 12 cavalli.

451. *Tempo*. L'unità di tempo è comune a tutte le nazioni, ed è il *giorno solare*. Un *giorno* si divide in 24 *ore*, l'ora in 60 *minuti*, il minuto in 60 *secondi*, il secondo in 60 *terzi*, ecc.. Se non che la suddivisione del secondo in terzi è oggi poco in uso, e si adoperano in sua vece i *decimi* e *centesimi* di secondo.

L'*anno comune* si compone di 365 giorni, il *bisestile* di 366. Esso si divide in 12 parti disuguali chiamate *mesi*. In commercio si considera ogni mese come composto di 30 giorni. Cento anni formano un *secolo*.

L'*anno astronomico* si compone di 365 giorni, 5 ore, 48 minuti, 50 secondi e due decimi di secondo.

ARTICOLO II.

Sistema metrico francese.

452. *Sistema antico.* Nell' antico sistema metrico francese l'unità di lunghezza è la *tesa*, che si divide in 6 *piedi*, il piede in 12 *pollici*. il pollice in 12 *linee*, la linea in 12 *punti*.

Per le misure itinerarie l' unità è la *lega*, che ha diversi valori. La lega ordinaria è di 2280 tese.

L' unità di peso è la *libbra*. che si divide in 2 *marchi*, il marco in 8 *once*, l' oncia in 8 *grossi*. il grosso in 3 *scrupoli*, lo scrupolo in 24 *grani*.

L' unità monetaria è la *lira*, che si divide in 20 *soldi*, il soldo in 12 *denari*.

453. *Sistema nuovo.* La misura di lunghezza è la misura fondamentale del nuovo sistema metrico francese. La sua unità si chiama *metro*, parola derivata dalla lingua greca che significa *misura*.

454. Il metro è la diecimilionesima parte della distanza del polo all' equatore, calcolata sul meridiano di Parigi; ed equivale a 3 piedi 11 linee e $\frac{296}{1000}$ di una linea.

455. I multipli e le suddivisioni del metro sono decimali; perciò il nuovo sistema metrico francese porta il nome di *sistema metrico decimale*

456. I multipli si limitano alle decine, centinaja, migliaja, e decine di migliaja dell' unità principale, ossia del metro, perchè questi multipli bastano per gli usi della società. Essi vengono adoperati mettendo innanzi alla parola *metro* le voci greche *deca*, *ecto*, *kilo*, *miria*, che significano *dieci*, *cento*, *mille*, *diecimila*. Quindi il *decametro* dinota dieci metri. l' *ectometro o ettometro* cento metri, il *kilometro* o *chilometro* mille metri, il *miriametro* diecimila metri.

457. Le suddivisioni del metro si limitano alle parti decime, centesime, e millesime, perchè queste sono sufficienti ai bisogni della Società. Esse vengono espresse dalle voci *deci*, *centi*, *milli*, derivate dalla lingua latina, e significano *decimo*, *centesimo*, *millesimo*. Queste voci si mettono innanzi alla parola metro, come si è detto per i multipli di questo. Quindi il *decimetro* esprime la decima parte del metro, il *centimetro* la centesima, il *millimetro* la millesima.

458. La nomenclatura fin qui esposta, che è così semplice e regolare, si applica ai multipli ed alle suddivisioni delle unità di tutte le altre misure. Ciò premesso, possiamo ora formarci una idea chiara del nuovo sistema metrico francese.

459. *Misure di lunghezza.* L' unità di lunghezza è, come abbiam detto, il *metro*. L' unità itineraria è il *miriametro*, o il *chilometro*.

460. *Misure di superficie.* L' unità di misura delle superficie è il *metro quadrato*.

Per le misure agrarie l'unità è il *decametro quadrato*, e si chiama *ara*, parola derivata dalla voce latina *area*, che significa *aja*.

I multipli dell' ara, che si usano, sono l' *ettara*, e la *miriara*. La sola suddivisione dell' ara ammessa dall' uso è la *centiara*.

461. *Misure di solidità*. L' unità di misura per le solidità o volumi de' solidi è il *metro cubo*.

Quando le misure di volume si applicano alle legna da bruciare, o ai materiali di costruzione, l' unità principale o il metro cubo prende un nome particolare, e si chiama *stero*.

462. *Misure di capacità*. L' unità di capacità è il decimetro cubo, che si chiama *litro*.

Le suddivisioni del litro sono il *decilitro*, ed il *centilitro*. I multipli sono il *decalitro*, e l' *ettolitro*, che serve come unità per la misura degli aridi, come pure per i liquidi in grande.

463. *Pesi*. L' unità di peso si chiama *grammo*. Il grammo equivale al peso di un centimetro cubo di acqua distillata, ridotta al suo massimo grado di densità, cioè a 4 gradi del termometro centigrado, e pesata nel vuoto.

I multipli del grammo sono il *decagrammo*, l' *ettogrammo*, il *chilogrammo*, il *miriagrammo*.

Le suddivisioni del grammo sono il *decigrammo*, il *centigrammo*, il *milligrammo*.

464. *Monete*. L' unità di moneta si chiama *franco*, che si divide in *decimi*, e *centesimi*.

Il suo valore intrinseco è quello di un pezzo di argento del peso di cinque grammi, che contiene un decimo di rame di lega. Il suo diametro è di 21 millimetri.

I multipli del franco sono le monete d' argento di 2 e di 5 franchi; le monete d' oro di 10, 20, 40 e 100 franchi.

ARTICOLO III.

Nuovo sistema metrico napoletano.

465. La base del nuovo sistema metrico napoletano è il *palmo*, che si divide in parti decimali, e dieci palmi formano una *canna*.

Il palmo è la settimilesima parte di un minuto primo del grado medio del meridiano terrestre, ovvero la settemilesima parte del miglio geografico d' Italia o miglio nautico di sessanta al grado.

466. La canna lineare, la canna quadrata, e la canna cuba sono le unità di misura di lunghezza, di superficie, e di solidità per tutti gli usi. La prima è uguale a 10 palmi lineari, la seconda a 100 palmi quadrati, la terza a 1000 palmi cubi.

467. L' unità superficiale delle misure agrarie è il *moggio* di 10000 palmi quadrati, ossia un quadrato che abbia per lato 100 palmi, o canne 10. Esso si divide in parti decimali.

468. Il *tomolo* è l' unità delle misure di capacità per gli aridi. Esso equivale a 3 palmi cubi, e si divide in 2 *mezzette*, o in 4

quarte, o pure in 24 *misure*, ciascuna delle quali eguaglia il cubo del mezzo palmo. La misura degli aridi si pratica a *raso* e non a *colmo*.

469. Il *barile* è l' unità di misura di capacità per alcuni liquidi, come il vino, l' aceto, l' acqua, ecc., e si divide in 60 *caraffe*. Esso equivale ad un cilindro retto del diametro di un palmo, e di tre palmi di altezza (g).

470. L' olio si misura a peso, cioè a cantaja, a rotola, ed a frazioni decimali di rotolo. Pel commercio a minuto si può misurare a capacità, ma le misure devono essere di figura cilindrica, e corrispondenti al peso di olio che debbono contenere alla temperatura di 20 gradi del termometro centigrado.

471. Il *rotolo* è l' unità di misura de' pesi, e si divide in parti decimali: la sua millesima parte è il *trappeso*. Il *cantaro* si compone di 100 rotola.

472. Per alcuni generi si usa la *libbra* colle sue suddivisioni, come nell' antico sistema.

ARTICOLO IV.

Sistema metrico di Sicilia.

473. Il *palmo*, unità di lunghezza, si divide in 12 *once*, l'oncia in 12 *linee*, la linea in 12 *punti*. Una *canna* è uguale ad 8 palmi. Il *miglio* equivale a 5760 palmi, e si compone di 45 *corde*: la corda contiene 4 *catene*, e la catena 4 canne.

474. L' unità delle misure agrarie è la *salma*, che è un quadrato avente per lato 64 canne: la salma si divide in 4 *bisacce*, la bisaccia in 4 *tomoli*, il tomolo in 4 *mondelli*, il mondello in 4 *carozzi*, il carozzo in 4 *quarti*, per cui il quarto risulta di 4 canne quadrate.

575. La misura di capacità per gli aridi è il *tomolo* equivalente ad un palmo cubo; si divide in 4 *mondelli*, ed il mondello in *carozzi*, *quarti* e *quartigli*, sempre di 4 in 4. Sedici tomoli formano la *salma*.

476. La misura di capacità per i liquidi è il *quartaro*, che è pure eguale ad un palmo cubo: si divide in 20 *quartucci*, il quartuccio in 2 *caraffe*, la caraffa in 2 *bicchieri*. Due quartari formano un *barile*, e 32 barili una *botte*.

477. L' unità di peso è il *rotolo* che corrisponde ad un quartuccio di olio d' oliva puro e lampante pesato a Palermo nell' aria, alla temperatura di 14 gradi e $\frac{2}{9}$ del termometro di Reaumur: si divide in 30 *once*, l' oncia in 8 *dramme*, la dramma in 3 *scrupoli*, lo scrupolo in 20 *grani*, il grano in 8 *ottavi*. La libbra è di 12 once, ed il cantaro di 100 rotola.

(g). Il cilindro retto ha la figura di un ordinario bicchiere da tavola.

CAPITOLO II.

DE' NUMERI COMPLESSI.

478. Si dice *numero incomplesso* ogni numero concreto, che si riferisce ad una sola specie d unità, o pure che contiene più unità sottoposte alla legge decimale. Quindi sono numeri incomplessi i numeri concreti 8 canne, 7 tese, 18 rotola, 20 franchi, 3 metri 48 centimetri, 12 ducati 27 grana, ecc...

Per l' opposto si chiama *numero complesso* ogni numero concreto, che contiene diverse specie d' unità dipendenti le une dalle altre, secondo una legge qualunque, ma diversa dalla decimale. Tali sono i numeri concreti 8 tese 4 piedi 11 linee, 7 libbre 8 once 4 dramme, 6 canne 3 palmi 7 once 4 minuti. Infatti, la canna si divide in 8 palmi, il palmo in 12 once, l'oncia in 5 minuti; e però quando si dice $6^{\text{can.}}.\ 3^{\text{pal.}}.\ 7^{\text{onc.}}.\ 4^{\text{min.}}$ è lo stesso che dire 6 canne, $\frac{3}{8}$ di canna, $\frac{7}{12}$ di palmo, o $\frac{7}{12}$ di $\frac{1}{8}$ di canna, $\frac{4}{5}$ di oncia, o $\frac{4}{5}$ di $\frac{1}{12}$ di $\frac{1}{8}$ di canna, ovvero 6 canne, $\frac{3}{8}$ di canna, $\frac{7}{96}$ di canna, $\frac{4}{480}$ di canna. Da ciò si conchiude che i numeri complessi sono interi uniti con rotti semplici, o con rotti di rotti, o interi uniti con rotti di diversi denominatori, i quali dinotano la stessa unità divisa in parti di diverse grandezze. Ed ecco perchè gli antichi Aritmetici davano ai numeri complessi il nome di *numeri denominati*.

ARTICOLO I.

Riduzione di un numero complesso in una frazione dell' unità principale.

479. Sia proposto, per esempio, di ridurre 6 canne, 3 palmi, 7 once in una frazione di canna. Si dispone l' operazione come si vede al margine.

Si dirà: la canna vale 8 palmi, perciò 6 canne equivalgono a 48 palmi, che aggiunti ai 3 palmi del numero proposto fanno 51 palmi. Ma il palmo vale 12 once, dunque i 51 palmi equivalgono a 51 volte 12 once, o a 612 once, che aggiunte alle 7 once del numero proposto fanno 619 once. Or la canna equivale a 96 once, dunque un' oncia è $\frac{1}{96}$ di una canna, e per conseguenza le 619 once sono equivalenti a $\frac{619}{96}$ di canna.

$$
\begin{array}{l}
6^{\text{can.}}.\ 3^{\text{pal.}}.\ 7^{\text{onc.}} \\
8 \\
\hline
51^{\text{palmi}} \\
12 \\
\hline
102 \\
517 \\
\hline
619^{\text{once}}
\end{array}
$$

Da ciò si conchiude che

Per ridurre un numero complesso in una frazione dell' unità principale, bisogna prima ridurlo in unità della sua infima specie; poi dare al risultato, per denominatore, il numero che dinota quante unità di questa infima specie si contengono nella specie più alta del numero proposto.

ARTICOLO II.

Riduzione di una frazione di una unità principale qualunque in un numero complesso.

480. Sia proposto, per esempio, di ridurre la frazione $\frac{619}{96}$ di canna in un numero complesso.

Si dividerà 619 per 96 s' avrà 6 per quoziente, 43 per resto; e però la frazione proposta equivale a 6 canne e $\frac{43}{96}$ di canna. Ma 43 canne equivalgono a 344 palmi, dunque si dividerà 344 per 96; il che dà 3 per quoziente, e 56 per resto. Quindi la frazione $\frac{43}{96}$ di canna equivale a 3 palmi $\frac{56}{96}$ di palmo. Or 56 palmi sono equivalenti a 672 once, dunque si dividerà 672 per 96; il che dà il quoziente esatto 7. Da ciò si conchiude che la frazione proposta equivale a 6 canne, 3 palmi, 7 once. Dunque

$$
\begin{array}{r|l}
619 & 96 \\
576 & 6^{\text{can.}}.\ 3^{\text{pal.}}.\ 7^{\text{onc.}} \\
\hline
43 & \\
8 & \\
\hline
344 & \\
288 & \\
\hline
56 & \\
12 & \\
\hline
112 & \\
56 & \\
\hline
672 & \\
672 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Per ridurre una frazione di una unità principale qualunque in un numero complesso, bisogna dividere primieramente il numeratore pel denominatore; il che dà le unità principali ed un certo resto. In seguito, si moltiplicherà questo resto pel numero delle unità della prima suddivisione dell' unità principale, e si dividerà il prodotto pel denominatore, si avrà un nuovo quoziente, ch' esprime le unità della prima suddivisione, ed un nuovo resto. Si continuerà l' operazione nello stesso modo finchè s' arrivi all' ultima suddivisione dell' unità principale

Questa regola suppone che il numeratore della frazione proposta sia maggiore del denominatore. Nel caso che fosse minore si opererà come abbiam fatto più sopra nel ridurre $\frac{43}{96}$ di canna in palmi ed once, e proseguendo si potrebbe ancora ridurre in palmi, once e minuti, che è l' ultima suddivisione dell' unità principale.

CAPITOLO III.

CALCOLO DE' NUMERI COMPLESSI.

481. Con le regole esposte nel capitolo precedente si possono facilmente ridurre le operazioni sui numeri complessi alle regole ordinarie del calcolo delle frazioni. Infatti, qualunque siasi l'operazione proposta si può primieramente trasformare ciascun numero complesso in una frazione dell'unità principale, e poi s'effettua sui numeri così trasformati l'operazione richiesta. S'avrà una frazione, che ridotta in un numero complesso darà il risultato richiesto.

482. Ciò non ostante, s'arriva più facilmente e più velocemente allo scopo operando direttamente sui numeri complessi, almeno per le tre prime operazioni, cioè somma, sottrazione, e moltiplicazione. L'uso ha reso così familiare le divisioni e suddivisioni delle misure, de' pesi, e delle monete che si può operare sui numeri complessi come se fossero interi, senza adoperare i denominatori, bastando solo che si sappiano dal calcolatore.

ARTICOLO I.

Addizione de' numeri complessi.

483. Un Mercante ha venduto una volta $7^{can.}.2^{pal.}.8^{onc.}4^{min.}$ di tela, un'altra volta $9^{can.}.5^{pal.}.9^{onc.}.3^{min.}$, infine $8^{can.}.7^{pal.}.3^{onc.}.2^{min.}$. Si desidera sapere quanta tela ha venduto in tutto, è chiaro che per arrivare a questa conoscenza bisogna fare l'addizione de' tre numeri complessi accennati. L'operazione si dispone come si vede qui sotto

$$
\begin{array}{llll}
7^{can.} & .\,2^{pal.} & .\,8^{onc} & .\,4^{min.} \\
9 & .\,5 & .\,9 & .\,3 \\
8 & .\,7 & .\,3 & .\,2 \\
\hline
25 & .\,7 & .\,9 & .\,4
\end{array}
$$

La somma della prima colonna a destra è 9 minuti, cioè un'oncia e 4 minuti, perciò si scrive 4 sotto la linea, e si serba l'oncia per aggiungerla alla colonna delle once. La somma delle once con l'oncia della somma precedente è 21 once, ossia un palmo e 9 once, si scrive 9 sotto la linea, e si serba il palmo per aggiungerlo alla colonna de' palmi. La somma de' palmi col palmo della somma

precedente è 15 palmi, cioè una canna e 7 palmi, si scrive 7 sotto la linea, e si serba la canna per aggiungerla alla colonna delle canne. La somma delle canne con la canna della somma precedente è 25, che si scrive tal quale sotto la linea. Dunque la somma richiesta è $25^{\text{can.}} . 7^{\text{pal.}} . 9^{\text{onc.}} . 4^{\text{min.}}$. Da ciò si conchiude che

Per fare la somma de' numeri complessi, bisogna primieramente scrivere gli uni sotto agli altri, di modo che le unità della stessa specie si trovino in una medesima colonna. In seguito si troveranno separatamente e successivamente le somme de' numeri di ciascuna specie, principiando da quelli della specie minima; e si noteranno sotto la linea in corrispondenza delle specie, a cui appartengono Se qualcuna delle somme accennate conterrà una, o più unità della specie prossimamente maggiore, si serberanno siffatte unità per la somma seguente, e si noterà sotto la linea il solo avanzo; nel caso contrario si scriverà il risultato come si sarà trovato.

ARTICOLO II.

Sottrazione de' numeri complessi.

481. Una lamina di piombo pesa 32 *libbre* 7 *once* 6 *dramme;* un' altra lamina dello stesso metallo pesa 24 *libbre* 8 *once* 8 *dramme*, si vuol sapere di quanto il primo peso sorpassa il secondo. È manifesto che per arrivare a questa conoscenza bisogna sottrarre il secondo numero complesso dal primo. L' operazione si dispone come nell' addizione

$$\begin{array}{r} 32^{\text{lib.}} . \ 7^{\text{onc.}} . \ 6^{\text{dram.}} \\ 24 \ . \ 8 \ . \ 8 \\ \hline 7 \ . \ 10 \ . \ 8 \end{array}$$

Da 6 dramme non si possono sottrarre 8 dramme, perciò s' accrescono quelle di un' oncia, ovvero di 10 dramme, s' avranno in tal modo 16 dramme, da cui sottratte 8, resta 8 che si scrive sotto la linea. Da 7 once, diminuite di una, ossia da 6 once non si possono togliere 8 once, perciò s' accrescono le 6 once di una libbra, ovvero di 12 once, e da 18 once sottrattene 8, s' avrà il residuo 10, che si scriverà sotto alla linea. Questo residuo s' avrebbe ancora non considerando le 7 once come diminuite di un' oncia, ed accrescendo il sottrattore 8 di una unità, secondo che si è detto (n.° 101). Infatti, 7 once e 12 once fanno 19 once, da cui sottratte 9 once, s' avrà il residuo 10. Finalmente, rimane a sottrarre 24 libbre da 31 libbre; e però il risultato dell' operazione è 7 libbre, 10 once, 8 dramme. Dunque

Per fare la sottrazione de' numeri complessi, bisogna scrivere il minore sotto al maggiore nel modo tenuto per l' addizione. In seguito si farà la sottrazione per parti, cominciando dalle unità della minima specie. Se qualcuna delle sottrazioni parziali non potrà farsi, s' aggiungerà al sottraendo parziale una unità della specie prossimamente maggiore, se non che in tal caso bisogna considerare la specie prossimamente maggiore come diminuita di una unità. Ma quando non si volesse considerare la specie prossimamente maggiore come diminuito di una unità, allora si dovrà accrescere di una unità il numero delle unità di questa specie, che si trovano nel sottrattore.

ARTICOLO III.

Moltiplicazione de' numeri complessi.

485. Si è detto (n.° 112) che *la moltiplicazione è una operazione, con cui essendo dati due numeri, si forma un terzo numero, facendo sul primo de' numeri dati precisamente la stessa operazione, che si fa sull' unità per formare il secondo.* Da ciò segue che il moltiplicando può essere un numero astratto o concreto, ma che il moltiplicatore dev' esser sempre un numero astratto; e che il prodotto dev' esser sempre della natura del moltiplicando.

486. Dalle cose precedenti pare doversi conchiudere che non si possa moltiplicare un numero concreto per un altro numero concreto; perciò convien spiegare in qual senso si debba intendere una siffatta moltiplicazione. Questa spiegazione farà vedere che la definizione della moltiplicazione più sopra nominata è generale e si applica a qualsivoglia moltiplicazione. Infatti, supponiamo che una canna di panno sia costata 6 ducati, e che si voglia sapere quanto costino 10 canne dello stesso panno: è chiaro che per risolvere questa quistione si deve moltiplicare 6 ducati per 10 canne; e però stando alla definizione generale della moltiplicazione si formerà il prodotto con fare sul moltiplicando 6 ducati precisamente la stessa operazione che si fa sull' unità per formare il moltiplicatore 10 canne. Or per formare il numero 10 canne per mezzo dell' unità della sua specie bisogna prendere una canna 10 volte, dunque per formare il prodotto richiesto bisogna prendere il moltiplicando 6 ducati 10 volte. Da ciò si conchiude che

Moltiplicare un numero qualunque per un numero complesso significa moltiplicare il moltiplicando pel numero astratto, che esprime il rapporto del moltiplicatore all' unità principale della sua specie.

487. Ciò premesso, distingueremo due casi nella moltiplicazione de' numeri complessi, secondochè il moltiplicatore sarà un numero incomplesso, o un numero complesso.

488. *I. Caso.* Supponiamo che con un ducato si sia avuto 2 canne, 5 palmi, 7 once di tela, e che si voglia sapere quanto di

questa tela si dovrà avere con 8 ducati; è chiaro che per saperlo bisogna moltiplicare 2 canne, 5 palmi, 7 once per 8. Si dispone l'operazione come segue

$$\begin{array}{r} 2^{can.} \,.\, 5^{pal.} \,.\, 7^{onc.} \\ 8 \\ \hline 21 \quad .\; 4 \quad .\; 8 \end{array}$$

Si dirà: 7 once prese 8 volte fanno 56 once, cioè 4 palmi e 8 once; perciò si scrive 8 sotto la linea, e si serbano i 4 palmi pel prodotto seguente. Palmi 5 presi 8 volte, una con i 4 palmi del prodotto precedente, fanno 44 palmi, ovvero 5 canne e 4 palmi: si scrivono i 4 palmi sotto la linea, e si serbano le 5 canne pel prodotto seguente. Canne 2 prese 8 volte, una colle 5 canne del prodotto precedente, fanno 21 canne; si scriva 21 tal quale sotto la linea. Sicchè il prodotto cercato è 21 canne, 4 palmi, 8 once. Dunque

Per moltiplicare un numero complesso per un numero incomplesso, bisogna moltiplicare tutte le parti del moltiplicando, a cominciare dalle più piccole, pel moltiplicatore. I prodotti parziali si scriveranno separatamente sotto la linea; ma se qualcuno di essi giungerà a formare una, o più unità del prodotto seguente, s' aggiungeranno esse a siffatto prodotto, scrivendo sotto la linea il solo avanzo.

489. È facile il vedere che questa maniera di operare sarebbe troppo lunga, quando il moltiplicatore fosse un numero considerevole; perciò si è cercato il modo di abbreviarla scomponendo le diverse parti del moltiplicando in parti aliquote dell' unità immediatamente superiore. Epperò questa maniera di fare la moltiplicazione si chiama la *moltiplicazione per parti aliquote*, o la moltiplicazione col *prendere in parti*. Sia proposto, per esempio, di moltiplicare 12 *lire*, 13 *soldi*, 10 *denari* per 8 *tese*. Si dispone l' operazione come segue

	$12^{l}.\ 13^{s}.\ 10^{d}$
	8^{t}
	96^{l}
Prodotto di 10^{s} per 8. . .	4
. . . . 2	0 . 16^{s}
. . . . 1	0 . 8
. . . . 6^{d}	0 . 4
. . . . 4	0 . 2 . 8^{d}
	$101^{l}.\ 10^{s}.\ 8^{d}$

Il prodotto di 12 lire per 8 è 96 lire. Poichè una lira equivale a 20 soldi, si scompone 13 soldi in parti aliquote della lira, cioè in 10 soldi, 2 soldi, ed 1 soldo; di modo che moltiplicare 13 soldi per 8 è lo stesso che moltiplicare 10 soldi, più 2 soldi, più 1 soldo per 8. Ma 10 soldi fanno mezza lira, dunque il prodotto di 10 soldi per 8 è la metà del prodotto di 1 lira per 8, cioè è 4 lire. Or se 10 soldi danno al prodotto 4 lire, 2 soldi dovranno dare la quinta parte di 4 lire, ossia 16 soldi; e per conseguenza 1 soldo darà al prodotto 8 soldi. Osservando poi che 1 soldo equivale a 12 denari, si scomporrà 10 denari in parti aliquote del soldo, scomponendo 10 in 6 + 4. Quindi si dirà: se un soldo dà al prodotto 8 soldi, 6 denari, o mezzo soldo, dovrà dare al prodotto 4 soldi, e 4 denari, o la terza parte del soldo, darà la terza parte di 8 soldi, cioè 2 soldi e 8 denari. Facendo infine la somma di tutt' i prodotti parziali, il prodotto cercato sarà $101^{l}.\ 10^{s}.\ 8^{d}$.

490. *II. Caso.* Sia ora proposto di moltiplicare 12 *lire*, 13 *soldi*, 10 *denari*, per 8 *tese*, 5 *piedi*, 8 *pollici*. Si dispone l' operazione come segue

	12^{l}.	13^{s}.	10^{d}
	8^{t}.	5^{p}.	8^{p}
Prodotto per 8^{t}.	101^{l}.	10^{s}.	8^{d}
3^{p}.	6 .	6 .	11
2	4 .	4 .	$7\frac{1}{3}$
8^{p}.	1 .	8 .	$2\frac{4}{9}$
	113^{l}.	10^{s}.	$4^{d}\frac{7}{9}$

Il prodotto del moltiplicando per 8 tese è stato trovato nell'esempio precedente. Per avere il prodotto dello stesso moltiplicando per 5 piedi, si scompone questo numero in parti aliquote della tesa, che vale 6 piedi, vale a dire in 3 piedi più 2 piedi. Or se una tesa dà al prodotto 12 lire, 13 soldi, 10 denari, 3 piedi, ossia mezza tesa deve dare al prodotto 6 lire, 6 soldi, 11 denari, e 2 piedi, cioè la terza parte della tesa, darà 4 lire, 4 soldi, 7 denari ed $\frac{1}{3}$. Ma un piede è 12 pollici, dunque 2 piedi fanno 24 pollici, perciò 8 pollici devono dare al prodotto la terza parte di ciò che ha dato 2 piedi, ovvero devono dare 1 lira, 8 soldi, 2 denari e $\frac{4}{9}$. Sommando in fine tutt' i prodotti parziali si avrà il prodotto cercato, che è 113 lire, 10 soldi. 4 denari e $\frac{7}{9}$.

491. Accade spesso che per facilitare il calcolo si debba fare un *prodotto ausiliario*. Così, nel nostro esempio, se il molti-

plicatore fosse stato 8 tese, 5 piedi, 8 linee, per avere il prodotto del moltiplicando per 8 linee, s'avrebbe dovuto trovare il prodotto del moltiplicando per 1 pollice, il quale avrebbe servito solamente a far conoscere facilmente il prodotto del moltiplicando per 8 linee. È poi manifesto che del prodotto ausiliario non si deve tener conto nella somma de' prodotti parziali.

492. Dalle cose precedenti si deduce la seguente regola generale.

Per moltiplicare un numero complesso per un altro numero complesso, bisogna moltiplicare in primo luogo le unità principali del moltiplicando per quelle del moltiplicatore; decomporre le suddivisioni del moltiplicando in parti aliquote della sua unità principale, ovvero delle parti aliquote, che le precedono; valutare queste frazioni sulle unità principali del moltiplicatore solamente; decomporre in seguito le suddivisioni del moltiplicatore in parti aliquote della sua unità principale, ovvero delle parti aliquote, che le precedono, e valutar queste frazioni sopra tutto il moltiplicando. Allorchè la frazione da valutarsi sarà troppo piccola rispetto a quella, a cui si rapporta, se ne faciliterà il calcolo prendendo una parte aliquota intermedia, per formare un prodotto ausiliario, da cui si dedurrà la parte aliquota cercata. Le cifre di questo prodotto non si comprenderanno nella somma de' prodotti parziali, che debbono comporre il prodotto totale; e però esse cifre si situeranno un poco più avanti verso la destra, a fine di poterle distinguere facilmente, o pure si segueranno con linee trasverse.

ARTICOLO IV.

Divisione de' numeri complessi

493. Prima di parlare della divisione de' numeri complessi giova richiamare in questo luogo ciò che è stato detto (n.° 117) intorno alla divisione considerata in un modo generale, vale a dire che *la divisione è una operazione, con cui essendo dato un prodotto, ed uno de' fattori, si trova l' altro fattore*.

Quindi il dividendo è un prodotto, e però dev' essere della stessa natura di uno de' suoi fattori.

494. Ciò premesso, distingueremo due casi nella divisione dei numeri complessi, secondo che il dividendo ed il divisore sono di natura diversa, o della stessa natura.

495. I. *Caso.* Questo caso si divide in due altri, secondo che il divisore è un numero incomplesso, o complesso.

1.° *Divisione di un numero complesso per un numero incomplesso di natura diversa.*

Supponiamo, per esempio, che si cerchi il prezzo di una tesa di un certo lavoro, sapendo che si sono pagate 1669 *lire*, 14 *soldi*, 6 *denari* per 246 *tese* dello stesso lavoro.

È manifesto che il prezzo richiesto sarà eguale ad $\frac{1}{246}$ del prezzo delle 246 tese; e per conseguenza si dovrà considerare il divisore come numero astratto. L'operazione si effettua come segue.

Si dividono le lire per 246; e si ha il quoziente 6 col resto 193, che si riduce a soldi moltiplicandolo per 20, ed aggiungendo al prodotto i 14 soldi del dividendo. Si divide 3874, e si ha 15 al quoziente col resto 184, che si riduce a denari moltiplicandolo per 12, ed aggiungendo al prodotto i 6 denari del dividendo. Si divide finalmente 2214 pel divisore, e si ha il quoziente esatto 9. Dunque il prezzo richiesto è 6 *lire*, 15 *soldi*, 9 *denari*.

$$
\begin{array}{r|l}
1669^{l}.\ 14^{s}.\ 6^{d} & 246 \\
\cline{2-2}
1471 & 6^{l}.\ 15^{s}.\ 9^{d} \\
\hline
193 & \\
20 & \\
\hline
3860 & \\
14 & \\
\hline
3874 & \\
184 & \\
12 & \\
\hline
2214 & \\
2214 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Da ciò si conchiude che *quando il divisore è incomplesso, e di natura diversa dal dividendo, bisogna considerarlo come numero astratto, e dividere successivamente le collezioni delle diverse specie d' unità del dividendo pel divisore, cominciando da quelle dell' ordine il più elevato, e ridurre in unità dell' ordine immediatamente inferiore l' ultimo resto di ciascuna divisione parziale, aggiungendoci il numero delle unità di questa specie contenute nel dividendo, il che da' un nuovo dividendo parziale, che si divide pel divisore. Il quoziente verrà espresso in unità principali e suddivisioni della natura di quelle del dividendo.*

2.° ***Divisione di un numero complesso per un numero complesso di natura diversa.***

Supponiamo, per esempio, che si domandi il prezzo di una tesa, sapendosi che 42 *tese*, 5 *piedi*, 4 *pollici*, sono costati 786 *lire*, 5 *soldi*, 11 *denari* e $d\ \frac{1}{9}$.

È chiaro che per risolvere questa quistione bisogna dividere $786^{l}.\ 5^{s}.\ 11^{d}.\ \frac{1}{9}$ per $42^{t}.\ 5^{p}.\ 4^{p}$. Dovendo esser il quoziente composto di lire, sarà della stessa natura del dividendo: e per conseguenza il divisore si dovrà considerare come un numero astratto. Or riducendo il divisore in un solo numero frazionario colla regola esposta (n.° 479) si trova che questo divisore equivale a $\frac{3088}{72}$ di tesa, dunque il rapporto del divisore alla tesa è il nume-

ro astratto $\frac{3088}{72}$; e per conseguenza questo secondo caso della divisione si riduce al precedente. Ma per dividere un numero per una frazione si deve moltiplicare questo numero per la frazione divisore rovesciata (n°. 293), dunque bisogna moltiplicare $786^{l}.\ 5^{s}.\ 11^{d}.\ \frac{1}{8}$ per 72, e dividere il prodotto, che è $56613^{l}.\ 6^{s}.\ 8^{d}$, per 3088 . e si troverà il quoziente $18^{l}.\ 6^{s}.\ 8^{d}$, che sarà il prezzo richiesto di una tesa.

496. II. *Caso. Divisione di un numero complesso per un numero complesso della stessa natura.*

Supponiamo, per esempio, che essendo 18 *lire*, 6 *soldi*, 8 *denari*, il prezzo di una tesa di un certo lavoro, si domandi quante tese dello stesso lavoro s' avranno con 786 *lire*. 5 *soldi*, 11 *denari*, *ed* $\frac{1}{8}$. È chiaro che per risolvere questa quistione bisogna dividere $786^{l}.\ 5^{s}.\ 11^{d}\ \frac{1}{8}$ per, $13^{l}.\ 6^{s}.\ 8^{d}$. Or essendo il divisore della stessa natnra del dividendo il quoziente dovrà essere un numero astratto, il quale esprimerà il rapporto delle tese richieste alla tesa. Ma il quoziente è uguale al dividendo diviso pel divisore, dunque si avrà un siffatto rapporto prendendo quello di $786^{l}.\ 4^{s}\ 11^{d}\ \frac{1}{8}$ a $18^{l}.\ 6^{s}.\ 8^{d}$. Riducendo il dividendo all' infima specie, si troverà ch' esso equivale a $183711\frac{1}{8}$ *denari*; Riducendo similmente il divisore all' infima specie, esso equivale a 4400 *denari*; dunque il rapporto richiesto è qnello de'due numeri astratti $188711\frac{1}{8}$ e 4400 e per conseguenza il numero delle tese richiesto si otterrà con dividere $188711\frac{1}{8}$ per 4400: se non che bisogna badare a considerare il dividendo come rappresentante $188711\frac{1}{8}$ *tese*, perchè il quoziente dev' esser espresso in tese: in quanto al divisore 4400, esso sarà considerato come un numero astratto. Ecco il tipo del calcolo.

Si divide il dividendo pel divisore, e si ha il quoziente 42 *tese* col resto $3911\frac{1}{9}$. Moltiplicando questo numero per 6 si riducono le tese a piedi $23466\frac{6}{9}$. Dividendo questo numero pel divisore, si ha il quoziente 5 *piedi*, ed il resto $1466\frac{6}{9}$ *piedi*. Moltiplicando questo numero per 12, si riducono i piedi a pollici 17600. Finalmente, dividendo questo numero pel divisore, si ha il quoziente esatto 4 *pollici*. Dunque, il numero richiesto è 42 *tese*, 5 *piedi*, 4 *pollici*.

$$
\begin{array}{r|l}
188711^{t}\frac{1}{9} & 4400 \\
\hline
3911\frac{1}{9} & 42^{t}.5^{p}.4^{p} \\
6 & \\
\hline
23466\frac{6}{9} & \\
1466\frac{6}{9} & \\
12 & \\
\hline
17600 & \\
17600 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

ARTICOLO V.

Osservazioni sulla moltiplicazione e sulla divisione de' numeri complessi.

497. La moltiplicazione, e la divisione de' numeri complessi presentano in certi casi alcune difficoltà, che meritano di essere esaminate.

Per la natura della moltiplicazione il moltiplicatore dev' esser sempre un numero astratto; per conseguenza si potrà effettuare la moltiplicazione di due numeri concreti, se questa operazione nasce da una quistione, che permette di considerare il moltiplicatore come un numero astratto. Così, si possono moltiplicare 12 *ducati* per 4 *canne*, perchè questa moltiplicazione si può ridurre alla seguente quistione: *se una canna costa* 12 *ducati*, *quanto costeranno 4 canne?* È manifesto che costeranno 4 volte 12 ducati; e però il prodotto s' otterrà moltiplicando 12 per 4. Ma se si volesse moltiplicare 12 *palmi* per 4 *palmi*, cioè un numero concreto per un altro della stessa natura, l' operazione sarebbe impossibile in Aritmetica pura, perchè si dovrebbero considerare come numeri astratti ambidue i fattori; e però il prodotto sarebbe un numero astratto, la cui natura resterebbe ignota. Quindi affinchè l'operazione accennata sia possibile, bisogna che nasca da una quistione, la quale permetta di considerare i due fattori come numeri astratti; ciò si ottiene nell' applicazione de' numeri alla misura della quantità continua, ossia nelle quistioni. che spettano alla Geometria. Supponiamo per esempio, che il pavimento di una stanza sia di forma rettangolare, cioè sia un rettangolo, che abbia

12 *palmi* di lunghezza, e 4 *palmi* di larghezza, o come suol dirsi, che la *base* sia lunga 12 *palmi*, e l'*altezza* lunga 4 *palmi*; e supponiamo inoltre che si prenda per unità di misura della superficie o *aja* del pavimento il *palmo quadrato*, che potrebbe esser un mattone quadrato, il cui lato fosse un palmo lineare; è chiaro che nell' aja del pavimento si conterranno 4 file di mattoni quadrati, ciascuna delle quali sarà composta di 12 mattoni; e per conseguenza la misura dell' aja del pavimento sarà espressa da 48 mattoni quadrati, vale a dire che il rapporto dell' aja del pavimento a quella del palmo quadrato equivale al rapporto del numero astratto 48 all' unità astratta. Da ciò consegue che il prodotto di 12 *palmi* per 4 *palmi* è 48 *palmi quadrati*.

498. Supponiamo ora che si dovesse formare il prodotto di tre fattori della stessa natura, per esempio, di 12 *palmi* per 10 *palmi* per 8 *palmi*. Questo prodotto sarebbe impossibile in Aritmetica pura, ma non lo è quando si considera come derivato dall' applicazione de' numeri alla misura del parallelepipedo rettangolo, come sarebbe una stanza, che avesse 12 *palmi* di lunghezza, 10 di larghezza, e 8 di altezza; e si volesse determinare il volume di questa stanza, prendendo per unità di misura il palmo cubico. Infatti, immaginando un dado di forma cubica, che abbia un palmo di lato, è facile il concepire che nel volume o capacità della stanza si dovranno contenere tanti di questi dadi, quanti vengono indicati dal prodotto de' tre numeri 12, 10, e 8, considerati come numeri astratti, Or questo prodotto è 960, dunque la misura del volume della stanza, di cui è parola, è 960 palmi cubici, vale a dire che il rapporto del volume della stanza al volume del palmo cubico equivale a quello del numero astratto 960 all'unità astratta.

499. Ciò premesso, si può ora comprendere che se si divide 48 *palmi quadrati* per 12 *palmi lineari*, il quoziente dovrà essere 4 *palmi lineari*. Se per l' opposto si volesse dividere 48 *palmi lineari* per 12 *palmi quadrati*, l' operazione sarebbe impossibile.

Similmente, è chiaro che 960 *palmi cubi* divisi per 12 *palmi lineari* devono dare al quoziente 80 *palmi quadrati*, e che divisi per 120 *palmi quadrati*, il quoziente sarà 8 *palmi lineari*. L' operazione sarebbe impossibile, se si volesse dividere 960 *palmi quadrati*, o *lineari*, per 12 *palmi cubi*.

ARTICOLO VI.

Elevazione a quadrato, ed estrazione della radice quadrata di un numero complesso.

500. Dalle cose dette nell' articolo precedente risulta che il prodotto di un numero concreto per se stesso rappresenta la misura dell' aja di un quadrato, che ha per lato il numero accennato. Così, il prodotto di 8 *palmi lineari* per 8 *palmi lineari* è 64 *palmi quadrati*, Quindi la seconda potenza o quadrato di un numero

concreto si forma con fare la seconda potenza o quadrato di questo numero considerato come se fosse un numero astratto.

501. Quando il numero proposto è complesso, la sua seconda potenza o quadrato si forma come abbiam detto, se non che il calcolo offre alcune particolarità, che meritano di esser esaminate.

Sia proposto, per esempio, di elevare a quadrato il numero 5 *tese*, 3 *piedi*, 1 *pollice*. Questo numero ridotto all' infima specie equivale a 397 *pollici*, il cui quadrato è 157609. Or questo numero si può ridurre in tese, piedi, e pollici quadrati, osservando che la tesa quadrata contiene 5184 pollici quadrati, ed il piede quadrato 146 pollici quadrati. Quindi dividendo 157609 per 5184 si ha il quoziente 30, che dinota le tese quadrate: dividendo poi il resto 2089 per 144, s' ha il quoziente 14, che esprime i piedi quadrati, ed il resto 73, che sono i pollici quadrati. Dunque il quoziente richiesto è 30 *tese quadrate*, 14 *piedi quadrati*, e 73 *pollici quadrati*.

502 Dalle cose precedenti si deduce facilmente il modo da tenersi per estrarre la radice quadrata da un numero complesso. Supponiamo per esempio, che si debba estrarre la radice quadrata dal numero complesso 30 *tese quadrate*, 14 *piedi quadrati*, 73 *pollici quadrati*. Si ridurrà questo numero all' infima specie, cioè a pollici quadrati, e s' avrà il numero 157609 *pollici quadrati*, la cui radice è 397 *pollici lineari*, ossia 5 *tese*, 3 *piedi*, 1 *pollice*.

ARTICOLO VII.

Elevazione a cubo, ed estrazione della radice cubica di un numero complesso

503. La formazione del cubo di un numero concreto corrisponde alla misura di un cubo, che avesse questo numero per lato; ossia che la lunghezza del suo lato fosse espressa dal numero accennato. Una siffatta formazione si concepisce facilmente dietro a ciò che abbiam detto intorno alla formazione del quadrato. Così, il cubo di 7 *palmi* è 343 *palmi cubici*.

504. Quando il numero proposto è complesso, si riduce prima all' infima specie, e poi si fa il cubo del numero che ne risulta. In somma, le cose dette per l' elevazione a quadrato, e per l' estrazione della radice quadrata di un numero complesso bastano a far concepire ciò che si deve fare quando si tratta del cubo e dell' estrazione della radice cubica di un numero complesso.

CAPITOLO IV.

DELLE REGOLE DEL TRE, E DI ALCUNE ALTRE, CHE NE DIPENDONO.

505. I problemi, che si possono proporre sui numeri, non hanno limite. A fine di risolverli bisogna in ciascun problema scoprire e determinare la serie delle operazioni, che si devono fare sui nu-

meri dati per arrivare a conoscere i numeri, che si cercano. In questa operazione della mente consiste ciò che si chiama *analisi del problema* Per fare questa analisi non vi sono regole fisse e certe: ma l'Algebra la facilita moltissimo, per cui si rimette a questa scienza la risoluzione generale de' problemi numerici. Purtuttavolta esiste una classe di problemi, per la cui risoluzione si possono stabilire colla semplice Aritmetica regole fisse e certe; e e sono quei problemi, che dipendono dalla teorica delle ragioni e proporzioni. Di siffatti problemi ci occuperemo in questo capitolo, perchè hanno la loro applicazione negli usi della Società.

ARTICOLO I.

Regola del tre semplice.

506. Quando in un problema i numeri dati sono tre, e si cerca un quarto numero. che possa formare con i primi una proporzione, in tal caso si dice che il problema proposto si risolve colla *regola del tre semplice*.

507. La regola del tre semplice si riduce dunque alla ricerca del quarto termine di una proporzione; il che si ottiene facilmente dietro alle cose dette altrove (n.° 421). Quindi sarebbe facilissimo risolvere le quistioni, che dipendono dalla regola del tre semplice, se si conoscesse l'*ordine*, con cui i tre numeri dati devono esser collocati, a fine di formare una proporzione col numero, che si cerca. In ciò consiste tutta la difficoltà, che può presentare una regola di tre semplice; perciò ci occuperemo in ciò che segue a risolvere una siffatta difficoltà.

508. De' tre numeri dati in una regola di tre semplice, due esprimono sempre quantità dello stesso genere o natura, e queste sono le quantità principali della quistione proposta: la terza è della stessa natura della quantità richiesta. Ella corrisponde ad una delle quantità principali, e la quantità richiesta corrisponde all' altra. L'esame di una tale corrispondenza fa conoscere l'ordine con cui devono esser collocati i termini dati; il che dicesi *intavolare la proporzione*.

Supponiamo, per esempio, che si debba risolvere il seguente problema

12 *Operai hanno fatto* 8 *canne di lavoro, quante ne faranno* 9 *operai nello stesso tempo?*

12 oper.	8 can.
9	x

In questo problema le quantità principali sono 12 operai, e 9 operai, la terza 8 canne corrisponde ad una delle due precedenti, e la quarta, che essendo incognita vien dinotata con la lettera x, corrisponde all' altra. Or è manifesto che più sarà grande il numero degli operai, e più grande sarà il numero delle canne, che faranno; più piccolo sarà il numero degli operai, e più piccolo sarà il numero delle canne, che faranno; dunque il numero 8 è

maggiore di x; e poichè in ogni proporzione se il terzo termine è maggiore del quarto, il primo dev'esser maggiore del secondo; per conseguenza s' intavolerà la proporzione nel modo che segue

$$12 : 9 :: 8 : x.$$

Dividendo poi il prodotto de' medj per l' estremo cognito, si troverà $x = 6$.

509. Supponiamo ora che sia proposto quest' altro problema.

Un lavoro è stato fatto in 8 giorni da 12 operai, in quanti giorni sarà fatto da 9 operai?	12 oper.	8 gior.
	9	x

È chiaro che più grande sarà il numero degli operai, e più piccolo sarà il numero de' giorni, che impiegheranno a fare il lavoro; più piccolo sarà il numero degli operai, e più grande sarà il numero de' giorni, che metteranno a fare lo stesso lavoro; per conseguenza sarà 8 minore di x; e la proporzione s' intavolerà nel modo che segue

$$9 : 12 :: 8 : x.$$

Dividendo poi il prodotto de' medj per l' estremo cognito, si troverà $x = 10 \frac{2}{3}$.

510. Dalle cose precedenti consegue che per intavolare la proporzione, bisogna considerare il termine incognito ed il suo omogeneo come il quarto ed il terzo termine della proporzione medesima. Stabilito in tal modo il secondo rapporto, si formerà il primo, cioè quello delle due quantità principali, con esaminare, secondo la natura del problema proposto, quale de' due termini già collocati deve esser maggiore; e siccome gli antecedenti debbono essere o ambidue maggiori, o ambidue minori de' rispettivi conseguenti, così riesce facile determinare quali de' due termini, che rimangono da collocarsi, deve occupare il primo o il secondo posto. Or abbiam veduto che nel primo problema, risoluto più sopra, le due quantità principali conservano nella proporzione il posto, che avevano; e che per l' opposto nel secondo problema le stesse quantità si son dovute situare in ordine inverso, a fine di stabilire la proporzione; per conseguenza si è distinta la regola del tre semplice in *regola del tre semplice diretta*, ed in *regola del tre semplice inversa*: di guisa che il primo problema appartiene alla regola del tre, semplice diretta, il secondo alla regola del tre semplice inversa. La ragione di queste denominazioni apparisce manifesta; nondimeno è necessario di rischiararle vieppiù con alcune considerazioni, che ci daranno il modo di definire precisamente in che consiste una regola del tre semplice diretta, o inversa; e che inoltre ci saranno utili in seguito,

511. Si dice *ragione reciproca* o *inversa* di una data ragione quella che risulta paragonando il conseguente coll' antecedente. Così, la ragione inversa della ragione di 8 : 4 è $\frac{4}{8}$, ovvero $\frac{1}{2}$.

Se paragonando fra loro due ragioni, si trova che il primo antecedente sta al suo conseguente, come il secondo antecedente al suo comseguente, si dice che i due primi termini sono in *ragione diretta* de'due secondi. Ma se per l'opposto si trova che il primo antecedente sta al suo conseguente come il secondo conseguente al suo antecedente, allora si dice che i due primi termini sono in *ragione inversa* de' due secondi. Così se son dati i numeri 13, 26, 7 e 14, i due primi saranno in ragion diretta de'due secondi, perchè 13 sta a 26 come 7 a 14. Per l'opposto, se i numeri dati sono 13, 26, 14, e 7, i due primi saranno in ragione inversa de' due secondi, perchè 13 sta a 26 come 7 a 14, e non già come 14 a 7.

512. Ciò premesso, si può ora comprendere perchè si sia distinta la regola di tre semplice in diretta, ed inversa. Infatti, nel primo poblema più sopra risoluto, le canne sono in ragione diretta degli operai, mentre nel secondo problema i giorni sono in ragione inversa degli operai. Quindi in un problema dipendente dalla regola del tre semplice si dirà che i due numeri della prima specie sono in *ragione diretta* di quelli della seconda, quando ciascun numero cresce o diminuisce come cresce o diminuisce il suo corrispondente; ed allora uno de' numeri della prima specie, ed il suo corrispondente della seconda devono formari i due antecedenti della proporzione, mentre l' altro termine della prima specie, ed il suo corrispondente della seconda devono formare i due conseguenti. Per l' opposto, si dirà che i due numeri della prima specie sono in *ragione inversa* de' loro corrispondenti, quando ciascun termine cresce o diminuisce come diminuisce o cresce il suo corrispondente; ed allora un termine della prima specie ed il suo corrispondente devono formare i due medj della proporzione, mentre l' altro termine della prima specie ed il suo corrispondente devono formare i due estremi.

513. Le considerazioni precedenti bastano a risolvere qualsivoglia quistione dipendente dalla regola del tre semplice. Or dalle cose dette più sopra (n.° 505) risulta che una quistione dipende dalla regola del tre, quando i suoi elementi possono formare una proporzione, di cui l' incognita sia l'ultimo termine, per conseguenza resta ad esaminare in qual caso la soluzione di un problema possa ottenersi da una proporzione.

514. Abbiam veduto che de' tre numeri dati di una regola del tre semplice due esprimono sempre quantità della stessa specie, e queste sono le quantità principali del problema proposto, la terza è della stessa specie della quantità cercata, e corrisponde ad una delle quantità principali, mentre la quantità cercata corrisponde all' altra. Da ciò consegue che la soluzione di un problema dipende dalla regola del tre, quando l'enunciato di esso è formato di due periodi, che abbiano i due seguenti requisiti: 1.° che i due termini del primo periodo siano omogenei respettivamente a quelli del secondo, vale a dire della stessa natura due a due 2.° che

se uno de' termini del rapporto cognito si supponga che divenga doppio, triplo, quadruplo, ecc. del suo omogeneo, gli altri due omogenei debbono pure essere l'uno doppio, triplo, quadruplo, ecc. dell' altro.

Quindi il primo problema proposto più sopra si può risolvere con una regola del tre, perchè se in vece di 12 operai si supponga che s' impieghino 36 operai, questi in vece di fare 8 canne, ne faranno 24.

Per l'opposto, il tempo che una pietra impiega a cadere non essendo doppio, quando l' altezza è doppia; una botte non impiegando a vuotarsi un tempo triplo, quando la sua capacità è tripla, non possono questi elementi appartenere ad una regola del tre. Tale sarebbe ancora il seguente problema

Si sono pagati 800 ducati per scavare un pozzo profondo 30 canne: quanto si dovrebbe pagare per un pozzo profondo 60 canne?

È facile il vedere che si dovrebbe pagare più che il doppio di 800 ducati, perchè la difficoltà del lavoro crescendo colla profondità del pozzo, le 30 ultime canne costeranno più che le prime. Quindi questo problema non si può risolvere con la regola del tre semplice. Per trovarne la soluzione si dovrebbe conoscere secondo qual legge cresce la difficoltà del lavoro, a misura che l'operaio discende ad una maggiore profondità.

ARTICOLO II.

Regola del tre composta

515. Quando nell' enunciato di un problema vi sono esplicitamente o implicitamente più di tre numeri dati, uno de' quali è della stessa specie del numero, che si cerca; ed oltre a ciò il problema è di natura tale che s avrebbe una regola del tre semplice, se nell' enunciato si conservassero soltanto il numero incognito, il suo omogeneo, e due qualunque degli altri numeri dati, purchè siano della stessa specie; in tal caso la regola, che risolve il problema proposto, dicesi *regola del tre composta*.

516. È stato dato questo nome alla regola, di cui è parola, perchè si può decomporre in due, o più regole del tre semplice, o pure perchè la ragione del numero incognito al suo omogeneo risulta eguale alla ragione composta delle ragioni degli altri numeri dati.

517. Da taluni Aritmetici la regola del tre composta si chiama ora regola del *cinque*, ora regola del *sette*, ora del *nove*, ec., secondo che i numeri dati sono cinque, sette, nove, ecc..

518. Il problema seguente appartiene alla regola del tre composta

20 *Uomini hanno fatto in 15 giorni 160 tese di lavoro: 30 uomini in 12 giorni quante tese faranno?*	10$^{u.}$. 15$^{g.}$. 160 30 . 12 . x

I numeri dati sono cinque, uno de' quali, cioè 160 tese è della stessa specie del numero incognito x.

Inoltre, se nell' enunciato si conservino solamente gli uomini e le tese, s' avrà la seguente regola del tre semplice:

20 *Uomini in* 15 *giorni hanno fatto* 160 *tese di lavoro;* 30 *uomini pure in* 15 *giorni quante tese faranno?*

Il tempo essendo lo stesso, non se ne tien conto, e si ha la proporzione

$$20 : 30 :: 160 : y \; . \; . \; . \; . \; . \; (1),$$

indicando con la lettara y il nuovo numero incognito, che facendo il calcolo si trova eguale a 240.

In secondo luogo, se nell' enunciato si conservino soltanto i giorni e le tese, s' avrà la seguente regola del tre semplice:

30 *Uomini in* 15 *giorni hanno fatto y tese di lavoro, quante ne faranno gli stessi* 30 *uomini in* 12 *giorni?*

Il numero degli uomini essendo lo stesso, non se ne tien conto, e la proporzione, che risulta sarà

$$15 : 12 :: y : x \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Or essendosi trovato più sopra $y = 240$, si potrà determinare x, e fatto il calcolo si troverà $x = 192$.

519. Il problema precedente è stato risoluto con due regole del tre semplice, ma si potrebbe ancora risolverlo per mezzo della ragione composta, e questo modo è più semplice e spedito. Infatti, se i termini delle due proporzioni (1) e (2) si moltiplicano per ordine, s' avrà una nuova proporzione (n.° 431), cioè

$$20 \times 15 : 30 \times 12 :: 160 \times y : y \times x.$$

Ma una ragione non si altera, allorchè si dividono i suoi termini per uno stesso numero (n.° 249), dunque dividendo per y i termini della seconda ragione, o che vale lo stesso togliendo il fattore y comune ai termini accennati, la proporzione precedente diviene

$$20 \times 15 : 30 \times 12 :: 160 : x \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Or 20 e 15 sono gli antecedenti, e 30 e 12 i conseguenti delle ragioni delle quantità date, dunque la ragione di 160 a x è uguale alla ragione composta della ragione degli uomini e della ragione de' giorni.

520. Volendo dunque risolvere speditamente il problema proposto si farà la ragione composta della ragione degli uomini e della ragione de' giorni, e s' eguaglierà alla ragione incognita. In tal modo s' avrà subito la proporzione (3), e la regola del tre composta sarà ridotta ad una regola del tre semplice. Se non che nella formazione della ragione composta, di cui è parola, bisogna aver presenti alcune avvertenze, senza le quali si potrebbe cadere in errore.

521. Abbiam veduto (n.° 511) che paragonando insieme due ragioni, l'una poteva essere diretta o inversa dell'altra, supposto che con i termini di queste ragioni si potesse formare una proporzione. Da ciò consegue che nella regola del tre composta la ragione incognita può essere eguale alla ragione composta delle ragioni dirette, o delle ragioni inverse, o delle dirette ed inverse delle ragioni date: e per conseguenza gli antecedenti di queste ragioni non cambieranno posto, quando esse sono dirette, ma succederà l'opposto quando sono inverse. Così, nel problema più sopra risoluto, la ragione degli uomini, e la ragione dei giorni sono ambedue dirette della ragione delle tese, che è la ragione incognita, perciò questa ragione è uguale alla ragion composta della ragion diretta degli uomini, e della ragion diretta dei giorni. Quindi nella formazione di questa ragione composta gli antecedenti 20 e 15 non cambieranno posto. Ma se le ragioni componenti fossero ambedue inverse della ragione incognita, allora gli antecedenti sarebbero 30 e 12: e se l'una fosse diretta, per esempio, quella degli uomini, e l'altra inversa, in tal caso gli antecedenti sarebbero 20 e 12.

522. Abbenchè le cose precedenti siano sufficienti a far risolvere un problema che dipende dalla regola del tre composta, nondimeno stimiamo di dover risolvere il seguente problema, affinchè si possa vedere come si deve operare nella pratica.

20 Uomini hanno fatto 160 *tese di lavoro in* 15 *giorni*: 30 *uomini in quanti giorni faranno* 192 tese?

$$\begin{array}{l} 20^{u.} \;.\; 160^{t.} \;.\; 15^{g.} \\ 30 \;.\; 192 \;.\; x \\ \hline 30 \;:\; 20 \\ 160 \;:\; 192 \\ \hline 30 \times 160 : 20 \times 192 :: 15 : x. \end{array}$$

Si dirà: la ragione degli uomini è inversa a quella de' giorni, e per conseguenza si dovrà scrivere sotto la prima linea 30: 20. La ragione delle tese è diretta di quella de' giorni, dunque si dovrà scrivere 160: 192. Moltiplicando fra loro gli antecedenti ed i conseguenti di queste ragioni s'avrà la ragione composta 30×160: 20×192 che si scriverà sotto alla seconda linea. Ma questa ragione composta è uguale alla ragione incognita, cioè a quella di 15: x, dunque sarà

$$30 \times 160 : 20 \times 192 :: 15 : x,$$

e fatto il calcolo si troverà in fine $x = 12$.

ARTICOLO III.

Divisione di un numero in parti proporzionali.

523. La divisione di un numero in parti proporzionali ad altri numeri dati, è un problema che ha importanti applicazioni negli usi della società, come si vedrà nell'articolo seguente.

524. *Dividere il numero 120 in tre parti proporzionali ai numeri* 2, 3, 5.

Dinotando colle lettere x, y, z le tre parti incognite, si ha la serie di rapporti eguali:

$$x : 2 :: y : 3 :: z : 5.$$

Ma quando si hanno più rapporti eguali, la somma di tutti gli antecedenti sta a quella de' conseguenti, come uno degli antecedenti al suo conseguente (n.° 427). dunque sarà la somma degli antecedenti x, y, z a quella de' conseguenti 2, 3, 5, ossia 10 come x a 2, o come y a 3, o come z a 5. Ma $x + y + z = 120$, per conseguenza le proporzioni, che determinano le incognite sono.

$$120 : 10 :: x : 2,\ 120 : 10 :: y : 3,\ 120 : 10 :: z : 5,$$

dalle quali si deduce

$$x = 24,\ y = 36,\ z = 60.$$

Infatti, la somma de' numeri 24, 36, 60 è uguale a 120. Da ciò si conchiude che.

Per dividere un numero in parti proporzionali ad altri numeri dati, bisogna moltiplicare il numero proposto rispettivamente per ciascuno de' numeri dati, e dividere il prodotto per la somma di questi stessi numeri.

525. *Dividere il numero* 240 *in tre parti tali che la prima stia alla seconda come* 2 *a* 3, *e che la prima stia alla terza come* 5 *a* 7.

Chiamando x, y, z le tre incognite, si ha

$$x : y :: 2 : 3,$$

$$x : z :: 5 : 7.$$

Se i secondi antecedenti di queste due proporzioni fossero eguali come lo sono i primi, esse avrebbero un rapporto di comune, invertendo l' ordine de' termini medj, e si ritornerebbe al caso del problema precedente. Or è facile il vedere che se i termini del secondo rapporto della prima proporzione si moltiplicano per 5, e quelli del secondo rapporto della seconda proporzione si moltiplicano per 2, i secondi antecedenti risulteranno eguali, senza che le due proporzioni siano alterate, e s' avrà.

$$x : y :: 10 : 15$$

$$x : z :: 10 : 14,$$

alle quali proporzioni si deduce

$$x : 10 :: y : 15$$

$$x : 10 :: z : 14,$$

ovvero

$$x : 10 :: y : 15 :: z : 14;$$

e però la soluzione si riduce a quella del problema precedente.

526. *Dividere il numero 430 in tre parti tali che la prima stia alla seconda come 1 a $\frac{4}{3}$, e che la seconda stia alla terza come $\frac{3}{5}$ a $\frac{1}{2}$.*

Vedemmo (n.° 416) che il rapporto di un numero intero ad un numero fratto, o quello di due fratti, si poteva sempre ridurre ad un rapporto equivalente espresso da due numeri interi. Quindi si può sostituire al rapporto di 1 a $\frac{4}{3}$ quello di 3 a 4; ed al rapporto di $\frac{3}{5}$ a $\frac{1}{2}$ quello di 6 a 5. Cio premesso, si hanno le due proporzioni

$$x : y :: 3 : 4$$

$$y : z :: 6 : 5,$$

ovvero, mettendo i medj in luogo degli estremi nella prima proporzione risulta

$$y : x :: 4 : 3$$

$$y : z :: 6 : 5,$$

ed allora si ricade nel caso del problema precedente.

ARTICOLO IV.

Regola di società semplice.

527. L'oggetto di questa regola è quello di dividere tra più persone associate in un medesimo commercio, il guadagno o la perdita, che risulta dalla loro associazione.

528. È facile il vedere che volendo stare alle leggi dell'equità nella divisione accennata, la parte che spetta a ciascuno associato dev'esser proporzionale al danaro o *capitale* impiegato, quando i tempi sono eguali. o proporzionale al tempo, quando i capitali sono eguali. Quindi la regola di società si riduce a dividere un numero dato, che esprime il guadagno o la perdita, in parti proporzionali ad altri numeri dati, che sono i diversi capitali impiegati, quando i tempi sono eguali, o i diversi tempi, quando i capitali sono eguali. Questa quistione essendo stata risoluta in un modo generale nell'articolo precedente, non avrebbe bisogno di ulteriore spiegazione; nondimeno giova darne un esempio.

529. *Tre amici hanno fatto borsa comune in un giuoco. Il primo ha messo 117 ducati, il secondo 72, il terzo 54. Essi ne hanno perduto 93: quanta è stata la perdita di ciascuno?*

La quistione si riduce a dividere la perdita totale 93 in proporzione dei tre capitali 117, 72, 54. Chiamando x, y, z, le tre incognite, ed applicando la regola (n.° 524) si troverà

$$x = \frac{117 \cdot 93}{243},\ y = \frac{72 \cdot 93}{243},\ z = \frac{54 \cdot 93}{243}$$

ARTICOLO V.

Regola di società composta.

530. Quando i capitali messi a frutto sono tenuti per diversi tempi, la regola di società chiamasi *composta*. È manifesto che in tal caso le parti di guadagno, o di perdita, devono essere proporzionali ai prodotti dei capitali per i tempi. Ciò si vedrà meglio nell' esempio seguente.

531. *Tre Mercanti avendo fatto società hanno guadagnato ducati* 1200. *Il primo mise ducati* 800 *per* 5 *mesi, il secondo ducati* 600 *per* 4 *mesi. ed il terzo ducati* 1000 *per* 12 *mesi. Qual è il guadagno, che spetta a ciascuno?*

È chiaro che il frutto prodotto da 800 ducati tenuti in società per 5 mesi dev' esser eguale a quello di 5 volte 800 ducati tenuti per un solo mese. Similmente, 600 ducati impiegati per 4 mesi equivalgono a 4 volte 600 ducati impiegati per un mese; e così pure 1000 ducati tenuti per 12 mesi danno lo stesso frutto che 12 volte 1000 ducati impiegati per un mese. Quindi il problema proposto si riduce al seguente.

Tre mercanti hanno guadagnato ducati 1200. *Il primo ha messo ducati* 4000, *il secondo* 2400, *il terzo* 12000. *Quanto è il guadagno di ciascuno?*

La quistione essendo ridotta ad una regola di società semplice, si risolverà come è stato detto ne l' articolo precedente.

532. *Tre mercanti si sono associati per provvedere di panno e di tela un reggimento. Il primo ha dato* 510 *metri di panno rosso, il secondo* 2000 *metri di panno turchino, ed il terzo* 3900 *metri di tela. Il panno turchino vale i $\frac{4}{5}$ del valore del panno rosso, ed il prezzo della tela è un ottavo di quello del panno turchino. Si dimanda ciò che spetta a ciascun mercante, essendo stato il guadagno di* 3750 *franchi.*

È manifesto che la parte del guadagno che spetta a ciascun mercante dev' esser proporzionale alla quantità della roba, che ha somministrato, ed al prezzo di essa. Or indicando con 1 il prezzo del panno rosso, quello del panno turchino sarà dinotato da $\frac{4}{5}$, e quello della tela da $\frac{1}{8}$ di $\frac{4}{5}$, ossia da $\frac{4}{40}$. I prezzi dunque de' generi somministrati stanno fra loro come i numeri 1, $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{40}$ ovvero come 1, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{10}$, perchè $\frac{4}{40}=\frac{1}{10}$. Riducendo l' unità a parti decime e moltiplicando i due termini della frazione $\frac{4}{5}$ per 2, i prezzi accennati staranno fra loro come $\frac{10}{10}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{1}{10}$, o pure come 10, 8, 1. Quindi il primo Mercante ha messo un capitale, che si può considerare come equivalente a 510×10, il secondo a 2000×8, ed il terzo a 3900. In tal modo la quistione proposta sarà ridotta

ad una regola di società semplice, e fatto il calcolo si troverà che il primo Mercante ha guadagnato 765 *franchi*, il secondo 2500, il terzo 585.

ARTICOLO VI.

Regola di alligazione.

533. La regola di alligazione consiste nel trovare il prezzo medio di una mescolanza composta di molte cose diverse, delle quali sono dati i prezzi e le quantità; o nel trovare qual porzione di queste cose convenga prendere, onde la mescolanza abbia un dato prezzo.

Ci occuperemo del solo primo caso, perchè il secondo non può esser trattato come si conviene senza il soccorso dell'Algebra.

534. La regola di alligazione pel primo caso è la seguente: *Si moltiplichi ciascuna parte della mescolanza pel prezzo respettivo, e si divida la somma dei prodotti per quella delle quantità mescolate, il quoziente sarà il prezzo medio richiesto.*

Ecco alcuni esempj.

535. *A qual prezzo si deve vendere il marco di una lega composta con sei marchi d' argento a* 48 *lire il marco, e* 12 *marchi di argento a* 36 *lire il marco, per non perdere nè guadagnare?*

Si moltiplichi 6 per 48, e si noti il prodotto 288: similmente si moltiplichi 12 per 36, e si noti il prodotto 432. La somma di questi due prodotti è 720 che diviso per 18, che è la somma della quantità d' argento alligate, si ha il quoziente 40 *lire*, che sarà il prezzo medio richiesto.

La dimostrazione della regola accennata si fa subito con mostrare come nasca dalla regola del tre. Infatti, è manifesto che se 18 marchi d' argento costano 720 lire, un solo marco deve costare la 18ª parte di 720, o in altri termini,

La somma de' marchi sta a quella dei loro prezzi, come un solo marco di lega sta al prezzo medio.

536. *A qual prezzo si deve vendere una bottiglia di una mescolanza composta con* 8 *bottiglie di vino a* 15 *soldi il litro, e* 12 *a* 10 *soldi, per non perdere, nè guadagnare?*

Si moltiplichi 8 per 15, e si noti il prodotto 120: si moltiplichi similmente 12 per 10, e si noti il prodotto 120. Finalmente, si divida 240, somma de' due prodotti, per 20, somma delle bottiglie, il quoziente 12 *soldi* sarà il prezzo medio richiesto.

ARTICOLO VII.

Regola d' interesse.

537. Si chiama *interesse* o *frutto* la retribuzione dovuta a colui, che ha prestato una somma di danaro, che si chiama *sorte*

principale o *capitale*. Questa retribuzione si paga in compenso de' vantaggi che il capitale avrebbe procurati al prestatore, se esso stesso l'avesse impiegato.

538. L'interesse si stipula con stabilire ciò che produce una somma determinata in un tempo dato. Così, quando 100 *ducati* producono 5 *ducati* d'interesse in un anno, si dice che l'interesse è al 5 *per* 100 *l'anno*; o pure che l'interesse è in *ragione* del 5 per 100 l'anno, il che si scrive per brevità 5 p. $\frac{0}{0}$ l'anno.

539. Si distinguono due specie d'interesse, cioè l'interesse *semplice*, e l'interesse *composto*. L'interesse semplice è quello, che rimanendo presso colui che ha preso il danaro a prestito, non vi porta più interesse. L'interesse composto è quello, da cui si cava l'interesse degl'interessi, vale a dire quello, in cui l'interesse di un anno s'aggiunge al capitale di questo anno, per formare il capitale dell'anno seguente.

540. Tutte le quistioni d'interesse. semplice o composto, si riducono alla seguente quistione generale. *Di queste quattro cose, cioè il capitale, la ragione dell'interesse, il tempo, e la somma da rimborsarsi, tre qualunque essendo date, trovare la quarta.*

Or quando si tratta dell'interesse composto, la determinazione della ragione dell'interesse, o del tempo ha bisogno dell'ajuto dell'Algebra, perciò ci limiteremo ad alcune quistioni relative all'interesse semplice.

541. *Qual è l'interesse annuale di un capitale di ducati* 7485 *e grana* 60 *al* 5 *per cento l'anno?*

Siccome la nostra moneta è decimale, così ducati 7485 e grana 60 si scrivono in commercio 7485 : 60. Ciò premesso, è manifesto che la quistione proposta è una regola del tre semplice, onde si ha la proporzione

$$100 : 5 :: 7485 : 60 : x.$$

Facendo il prodotto de' medj, e dividendolo per 100 con le regole conosciute si troverà $x = 374 : 28$, cioè ducati 374 e grana 28.

542. *Qual è l'interesse di un capitale di ducati* 7846 : 50 *al* 6 *p.* $\frac{0}{0}$, *durante* 4 *anni* 8 *mesi*?

Si cercherà in primo luogo l'interesse annuale per mezzo della proporzione

$$100 : 6 :: 7846 : 50 : x,$$

e si troverà $x = 470 : 79$, cioè ducati 470 e grana 79.

Resta a moltiplicare questo interesse per 4 anni 8 mesi, cioè per 4 anni e $\frac{2}{3}$ di anno, ovvero per $4\frac{2}{3}$, o infine per $\frac{14}{3}$ d'anno. Si moltiplicherà quindi 470 : 79 per 14, ed il prodotto si dividerà per 3, il quoziente sarà 2197 : 02, cioè ducati 2197 e grana 2, ch'è l'interesse richiesto.

543. *Qual è il capitale che in* 2 *anni* 6 *mesi dà per interesse ducati* 1729 : 06 *a* 8 *p.* $\frac{0}{0}$ *l'anno?*

Siccome 2 anni 6 mesi equivalgono a $\frac{5}{2}$ di un anno, così si dividerà 1729 : 06 per $\frac{5}{2}$, il chè dà il quoziente 691 : 624, cioè 691 *ducati*, 62 *grana*, e 4 *cavalli*, supponendo il grano diviso in 10 *cavalli*. Queste quoziente sarà l'interesse annuale; poi si dirà: *se* 8 *viene da* 100, *da chi viene* 691 : 624? s'avrà la proporzione

$$8 : 100 :: 691 : 624 : x,$$

e fatto il calcolo si troverà $x = 8645 : 30$, cioè ducati 8645 e grana 30.

544. *Un capitale di ducati* 17290 : 60 *ha dato ducati* 5187 : 18 *in* 7 *anni, a quanto per cento è stato impiegato?*

Si troverà in primo luogo l'interesse annuale dividendo 5187 : 18 per $\frac{15}{2}$, perchè 7 anni 6 mesi equivalgono a $\frac{15}{2}$ di un anno: il quoziente sarà 691 : 624. Poi si dirà: *se* 17290 : 60 *dà* 691 : 24 *in un anno*, 100 *quanto darà?* si troverà 4; quindi il capitale fu impiegato al 4 p. $\frac{0}{0}$ l'anno.

545. *Un capitale di ducati* 5942 : 45 *al* 6 *p.* $\frac{0}{0}$, *ha dato ducati* 490 : 252, *durante qual tempo è stato impiegato?*

Si trovi l'interesse annuale di questa somma per mezzo della proporzione

$$100 : 6 :: 5942 : 45 : x,$$

si troverà $x = 356 : 547$. Indi si divida l'interesse dato 490 : 252 per l'interesse annuale trovato, s'avrà il quoziente $\frac{490252}{356547}$, che sarà una frazione di anno. Riducendo questo numero incomplesso a numero complesso si troverà che il tempo richiesto è 1 *anno*, 4 *mesi*, 15 *giorni*, contando ogni mese per 30 giorni.